Particules chargées dans un champ électromagnétique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Se préparer

Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

M6.1 - Établir l'expression de l'énergie potentielle coulombienne, et en déduire que la force de Lorentz électrique est conservative. Définir le potentiel électrostatique et son lien avec le champ électrique.

M6.2 - Considérons deux électrodes planes parallèles entre lesquelles on impose une tension U, ce qui crée un champ $\vec{E}$ uniforme normal aux électrodes. Établir l'expression de $\vec{E}$.

M6.3 - Considérons deux électrodes planes parallèles entre lesquelles on impose une tension U. Une particule de charge q est initialement immobile au voisinage d'une électrode. Où faut-il qu'elle se trouve pour pouvoir traverser le dispositif ? Déterminer la vitesse avec laquelle elle atteint la seconde électrode.

M6.4 - On considère une particule de masse m, de charge q, plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$. La particule est initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ forme un angle α avec $\vec{e}_x$. Établir l'équation de la trajectoire et la représenter pour $q \gtrless 0$.

M6.5 - Considérons une particule de masse m, de charge q, plongée dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Elle est initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ est supposée orthogonale au champ magnétique. On admet que son mouvement reste plan. Montrer que la trajectoire est circulaire, exprimer le rayon et la pulsation cyclotron.

Cahier d'Entraînement

Le *Cahier d'Entraînement* est un projet collaboratif mené par des enseignants de CPGE, proposant aux étudiants des entraînements leur permettant de travailler en autonomie sur des techniques et « réflexes » utiles dans les exercices, en particulier calculatoires. Il est librement téléchargeable en scannant ou cliquant sur le QR-code ci-contre.

⇝ pour ce chapitre : 15.5, 15.6, 15.10, 15.11

Champ électrique seul

Exercice 1 : Cavité accélératrice d'électrons

2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrique ;*
- *Bilan énergétique.*

Les accélérateurs de particules, tels que le synchrotron SOLEIL à Saclay (schéma figure 1 partie gauche) ou l'ESRF à Grenoble, permettent d'explorer la structure de la matière à l'échelle du nanomètre, avec de nombreuses applications en physique, chimie, biologie, et technologie. Ces infrastructures produisent des faisceaux d'ondes électromagnétiques de forte intensité parfaitement contrôlés qui irradient les échantillons étudiés. Pour produire ce rayonnement, des électrons sont accélérés jusqu'à une vitesse de $0{,}9999\,c$ avant d'être injectés sur un anneau de stockage où ils suivent une trajectoire quasi-circulaire.

On s'intéresse dans cet exercice à une première étape d'accélération des électrons (masse m, charge $-e$), injectés dans une cavité linéaire de longueur d avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$, voir figure 1 partie droite. Cette cavité est formée par deux plaques entre lesquelles est imposée une tension U, ce qui créée un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E_0\,\vec{e}_x$. La vitesse des électrons est alors suffisamment faible pour pouvoir les traiter sans faire appel à la théorie de la relativité.

Figure 1 – Cavité accélératrice d'un synchrotron. La cavité accélératrice étudiée, schématisée à droite, correspond à la partie ❶ de l'installation, schématisée à gauche.

1 - Établir l'expression de E_0 en fonction de U et d. Dans quel sens la tension U doit-elle être appliquée ?

2 - On introduit pour la suite une constante α définie telle que

$$\vec{E} = -\frac{m}{e}\alpha\,\vec{e}_x$$

L'exprimer en fonction des autres grandeurs pertinentes.

3 - En négligeant toute autre force que la force électrique, déterminer la vitesse v_1 à laquelle l'électron sort de la cavité en fonction de v_0, α et d.

4 - En déduire le temps de vol dans la cavité t_1, et donner une interprétation physique de α.

En réalité, l'électron perd de l'énergie par rayonnement, ce qui modifie son mouvement dans la cavité. On cherche les nouvelles expressions de v_1' et t_1' prenant cet effet en compte. La puissance perdue par rayonnement est donnée par la formule de Larmor, proportionnelle au carré de l'accélération a' de l'électron :

$$\mathcal{P} = m\tau a'^2 \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{e^2}{6\pi m\varepsilon_0 c^3}\,.$$

5 - Déterminer la dimension de τ.

En pratique, $\tau \ll t_1$: on peut donc travailler au premier ordre en τ, c'est-à-dire négliger tous les termes de la forme τ^n dès que $n \geq 2$. Dans cette approximation, on a alors $t_1' - t_1 \simeq k_t\tau$ et $a' - \alpha \simeq k_a\tau$, avec k_t et k_a deux constantes (développements limités au premier ordre).

6 - Exprimer au premier ordre en τ l'énergie perdue par l'électron lors de son parcours dans la cavité.

7 - En déduire l'expression de la vitesse de sortie sous la forme

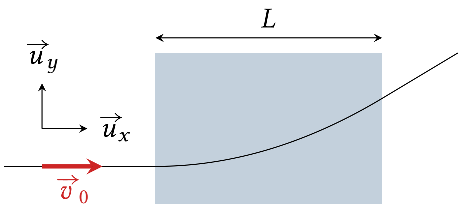
$$v_1' = v_1 - k_v \tau \,.$$

On utilisera le développement limité $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ pour $|\varepsilon| \ll 1$.

Exercice 2 : Détermination d'un champ électrique

oral banque PT | 3 | 2

- *Mouvement dans un champ électrique ;*
- *Étude de trajectoire ;*
- *Bilan d'énergie.*



Un électron de masse m, d'énergie cinétique $E_{c0} = 80\,\text{keV}$ pénètre à vitesse $\vec{v}_0$ horizontale dans une cavité de longueur $L = 1\,\text{m}$ où règne un champ électrique uniforme de norme E_0, dirigé selon l'un des axes du repère.

1 - Déterminer la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}_0$.

2 - Établir l'équation de la trajectoire de l'électron.

3 - Lors de sa traversée, l'énergie cinétique de l'électron varie de $|\Delta E_c| = 10\,\text{keV}$. Quel est le signe de ΔE_c ? Déterminer la norme E_0.

4 - Évaluer l'angle de déviation de la trajectoire en sortie de la zone de champ.

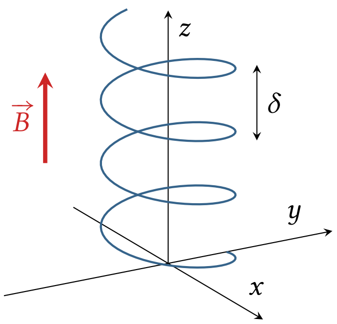
Données : $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$; $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$.

Champ magnétique seul

Exercice 3 : Mouvement cyclotron hélicoïdal

2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Coordonnées cylindriques.*



On s'intéresse au mouvement d'une particule de charge $q > 0$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme lorsque la vitesse initiale $\vec{v}_0$ de la particule forme un angle α avec la direction de $\vec{B}$. Le mouvement de la particule est alors hélicoïdal.

L'étude est menée dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On définit l'axe (Oz) dans la direction et le sens de $\vec{B}$, et l'axe (Ox) dans la direction et le sens de la projection de $\vec{v}_0$ dans le plan orthogonal à $\vec{B}$. La particule se trouve initialement en un point de l'axe (Oy). On travaille par la suite avec un système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz), dans lequel la nature hélicoïdale du mouvement se traduit par $r = R = \text{cte}$.

1 - Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule dans la base cylindrique.

2 - Établir les équations du mouvement.

3 - Montrer que le mouvement de la particule se fait à vitesse angulaire constante. Exprimer la pulsation cyclotron.

4 - Déterminer le rayon R de la trajectoire, en fonction notamment de $v_0 = ||\vec{v}_0||$ et α.

5 - Exprimer en fonction de R et α le pas δ de l'hélice, c'est-à-dire la distance dont la particule se déplace le long de l'axe (Oz) lorsqu'elle parcourt un cercle complet en projection dans le plan (Oxy).

✎ ***Correction —*** ***1*** *- Par définition,*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z}$$

puis par dérivation

$$\boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z\,.}$$

2 - *Étudions le mouvement de la particule dans le référentiel $\mathcal{R}$. Elle subit la force de Lorentz,*

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qRB\dot{\theta}\,\vec{e}_r\,.$$

Le PFD donne alors les trois équations du mouvement par projection dans la base polaire,

$$\boxed{\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = qRB\dot{\theta} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}}$$

> **Question d'analyse 1** - Justifier l'expression de la force de Lorentz.
>
> **Question d'analyse 2** - Pourquoi le poids de la particule n'apparaît-il pas dans le PFD ?

3 - *D'après la deuxième équation issue du PFD,*

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \text{donc} \qquad \dot{\theta} = \text{cte}\,.$$

La pulsation cyclotron est par définition la valeur absolue de la vitesse angulaire de la particule. La première équation donne alors

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\omega_c = |\dot{\theta}| = \frac{qB}{m}\,.}$$

> **Question d'analyse 3** - Quel est le signe de $\dot{\theta}$? Comment ce signe se manifeste-t-il sur l'allure de la trajectoire ?

4 - *Le repère est construit tel que*

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin\alpha\,\vec{e}_x + v_0\cos\alpha\,\vec{e}_z$$

> **Question d'analyse 4** - En s'appuyant sur un ou deux schéma(s), justifier l'expression de $\vec{v}_0$: présence du sin et du cos, absence de composante sur $\vec{e}_y$.

De plus, à l'instant initial, la particule se trouve sur l'axe (Oy) : on a donc à cet instant

$$\vec{e}_r = \vec{e}_y \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_x\,.$$

> **Question d'analyse 5** - Justifier à l'aide d'un schéma ce lien entre les deux bases.

On identifie donc

$$\vec{v}_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{base}}}{=} R\dot{\theta}\,(-\vec{e}_x) + \dot{z}\,\vec{e}_z = R\omega_c\vec{e}_x + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_0\sin\alpha\,\vec{e}_x + v_0\cos\alpha\,\vec{e}_z$$

d'où on déduit

$$R\omega_c = v_0\sin\alpha \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c} = \frac{mv_0\sin\alpha}{qB}\,.}$$

> **Question d'analyse 6** - Justifier la disparition du signe $-$ devant $\vec{e}_x$ dans l'expression de $\vec{v}_0$ légendée « base ».

5 - *Par définition de la vitesse angulaire, la particule parcourt un cercle en projection dans le plan (Oxy) au bout d'une durée T telle que*

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{soit} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_c}\,.$$

Par ailleurs, d'après les questions précédentes,

$$\dot{z} = v_0\cos\alpha\,.$$

Question d'analyse 7 - *Établir explicitement l'expression de $\dot{z}$.*

Ainsi, pendant la durée T, la coordonnée z augmente de $\dot{z}T$, d'où

$$\delta = v_0 \cos\alpha \times \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \cos\alpha \frac{R}{\sin\alpha} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\delta = \frac{2\pi R}{\tan\alpha}}\,.$$

Question d'analyse 8 - *Expliquer comment apparaît le terme $R/\sin\alpha$ dans le calcul.*

Exercice 4 : Mouvement cyclotron avec dissipation

oral banque PT | 2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Théorèmes énergétiques.*

On considère une particule ponctuelle de charge $q < 0$ et de masse m en mouvement dans un champ magnétique stationnaire uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$. À l'instant initial, la charge se trouve au centre du repère avec une vitesse $\vec{v}(t = 0) = v_0\,\vec{u}_y$.

1 - Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.

2 - On admet que la trajectoire est circulaire. Déterminer le rayon et le centre de la trajectoire.

3 - Justifier que le mouvement est périodique. Déterminer la période.

4 - En plus de la force magnétique, la charge subit une force dissipative de puissance $\mathcal{P} = -mv^2/\tau$, avec τ une constante. On suppose que le mouvement demeure quasi-circulaire. Établir l'expression du rayon en fonction du temps.

Exercice 5 : Étude du mouvement cyclotron en coordonnées cartésiennes

3 | 2

- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Coordonnées cartésiennes.*

Cet exercice a pour objectif d'étudier le mouvement cyclotron directement en coordonnées cartésiennes, et de montrer que la trajectoire associée est circulaire. Nous utiliserons pour cela une méthode astucieuse permettant de raccourcir notablement les calculs.

Considérons une particule de masse m et charge q en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen. Elle est soumise à un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$. À l'instant $t = 0$, elle se trouve à l'origine O du repère avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$ orthogonale à $\vec{B}$.

1 - Établir les équations du mouvement de la particule en coordonnées cartésiennes.

2 - En déduire que le mouvement de la particule est plan.

Pour toute la suite, on se place uniquement dans le plan de la trajectoire et on introduit deux variables complexes de position et de vitesse,

$$\underline{X} = x + \mathrm{i}\,y \qquad \text{et} \qquad \underline{V} = \frac{\mathrm{d}\underline{X}}{\mathrm{d}t} = v_x + \mathrm{i}\,v_y\,.$$

3 - Montrer que $\underline{V}$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\underline{V}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{qB}{m}\underline{V} = 0\,.$$

4 - En déduire les expressions de $\underline{V}$ puis de $\underline{X}$.

5 - Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule, et montrer qu'elles vérifient l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6 - Représenter l'allure de la trajectoire en fonction du signe de q.

Champ électrique et magnétique

Exercice 6 : Sélecteur de vitesse 1 | 1 |

▷ *Force de Lorentz.*

Une particule de masse m et charge q pénètre avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x$ dans une zone où existent un champ électrique $\vec{E} = E_0\,\vec{u}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{u}_z$ uniformes et stationnaire.

À quelle condition le vecteur vitesse de la particule reste-t-il inchangé ? Expliquer comment ce dispositif peut être adapté en sélecteur de vitesse.

Exercice 7 : Spectrométrie de masse 1 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrique ;*
- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Étude de trajectoire ;*
- *Bilan énergétique.*

Un spectromètre de masse est un appareil qui permet de mesurer le rapport m/z entre la masse m et la charge z d'un ion, très utilisé en analyse chimique. De nombreuses technologies de spectromètre de masse existent : nous étudions ici le principe d'un spectromètre dit « à secteur magnétique », utilisé afin de mesurer la masse molaire d'une protéine.

Dans un premier temps, des protéines sont ionisées et acquièrent une charge e ou $2e$ ($z = 1$ ou 2). Elles sont ensuite accélérées par une tension U dans la zone de transfert, avant d'atteindre une zone de séparation soumise à un champ magnétique créé par un aimant supraconducteur. Une barrette de capteurs de charge est placée dans la chambre de séparation. On mesure ainsi la quantité de protéines ayant impacté chaque point du détecteur en fonction de son abscisse y.

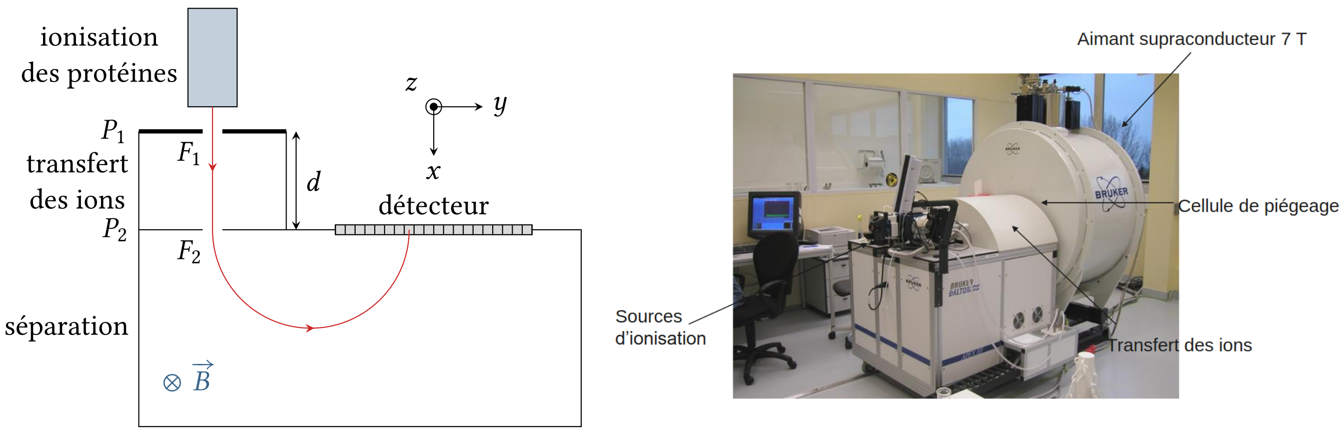


Figure 2 – Spectromètre de masse.

Une protéine ionisée de masse m et charge ze entre dans le spectromètre par la fente F_1. On néglige sa vitesse initiale. Une tension constante $U = 10\,\mathrm{kV}$ appliquée entre les plaques P_1 et P_2 séparées de d permet de l'accélérer jusqu'à la fente F_2.

1 - Quelle doit être la plaque de potentiel le plus élevé pour que l'ion soit effectivement accéléré ? Établir l'expression de la vitesse v de l'ion lorsqu'il atteint la plaque P_2.

L'ion pénètre ensuite dans la chambre de séparation où il règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\,\vec{e}_z$ valant 7 T. Ce champ magnétique donne à l'ion une trajectoire circulaire, et après avoir parcouru un demi tour il atteint le détecteur en un point d'abscisse y.

2 - Montrer que le mouvement de l'ion dans cette région est uniforme.

3 - Déterminer littéralement le rayon R de la trajectoire d'une protéine de charge ze.

4 - Les protéines ionisées sont détectées aux abscisses 14,8 cm et 10,5 cm, l'origine étant prise au niveau de F_2. En déduire la masse molaire de la protéine étudiée.

Exercice 8 : Cyclotron

2 | 2 |

- *Mouvement dans un champ électrique ;*
- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Étude de trajectoire ;*
- *Bilan énergétique.*

Un cyclotron est un accélérateur de particules utilisant un champ magnétique et un champ électrique alterné pour courber et accélérer des ions, permettant un contrôle précis de l'énergie des particules accélérées. On s'intéresse ici à un cyclotron à vocation médicale (il en existe une trentaine en France), qui accélère des protons pour les propulser sur une cible et produire par collision des isotopes radioactifs, utilisés dans le diagnostic et le traitement des cancers.

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2, appelées « dees » en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a. Les dees sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$, de norme $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$. Une tension sinusoïdale u d'amplitude $U_\mathrm{m} = 50\,\mathrm{kV}$ est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne un champ électrique colinéaire à $\overrightarrow{e_x}$. Les protons sont injectés au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

Données : masse d'un proton $m = 1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

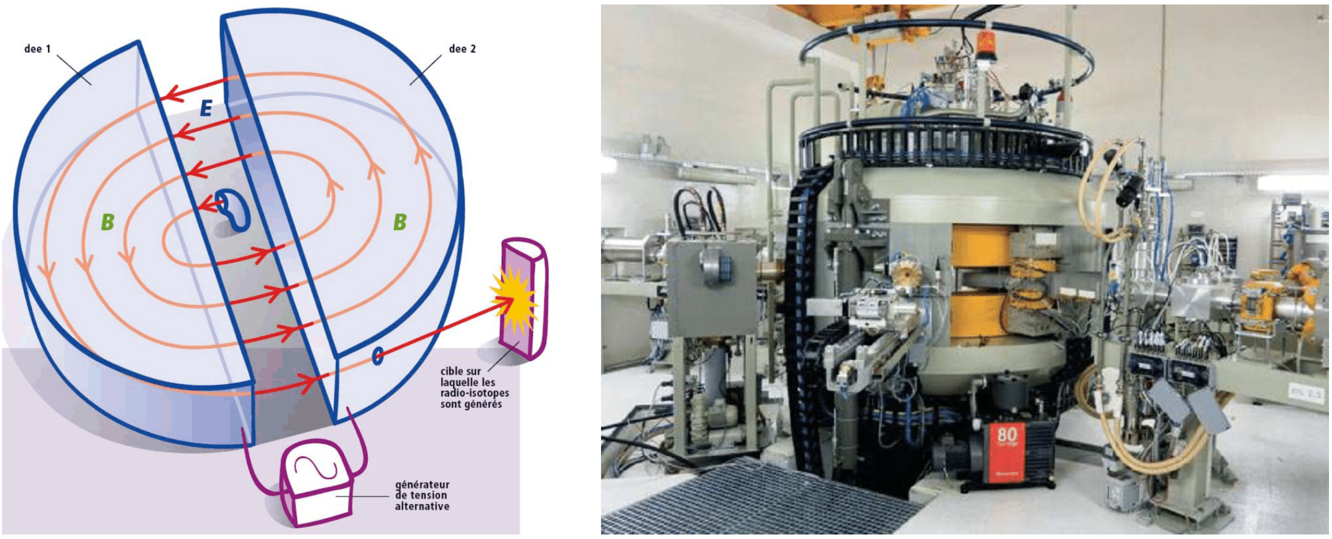


Figure 3 – Structure d'un cyclotron.

1 - Considérons un proton entrant dans un dee avec une vitesse v. Établir le rayon de courbure R de sa trajectoire des protons et son temps de parcours du dee Δt.

2 - Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dee ? Pour simplifier, on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension créneau.

3 - Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.

4 - Les protons quittent le synchrotron avec une énergie cinétique de l'ordre de 20 MeV. Calculer le rayon du dernier tour de dee parcouru, et le nombre de tours parcourus par le proton.

Exercice 9 : Mouvement dans des champs E et B croisés — 3 | 3

- *Mouvement dans un champ électrique ;*
- *Mouvement dans un champ magnétique ;*
- *Étude de trajectoire en coordonnées cartésiennes.*

Considérons une particule de masse m et charge $q > 0$, se trouvant initialement sans vitesse au point origine du repère. Cette particule est soumise aux champs $\vec{E} = E\,\vec{e}_y$ et $\vec{B} = B\,\vec{e}_z$. On pose $\omega = qB/m$.

1 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule et montrer que son mouvement est plan.

2 - Établir une équation différentielle portant sur la composante v_y de la vitesse de la particule. La résoudre en faisant apparaître une constante λ.

3 - En déduire l'expression de la composante v_x et déterminer λ.

4 - La valeur moyenne d'une fonction f T-périodique est définie par

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Déterminer $\langle \cos(\omega t) \rangle$ et $\langle \sin(\omega t) \rangle$.

5 - En déduire la vitesse de dérive $\vec{v}_\mathrm{D} = \langle \vec{v} \rangle$, définie comme la vitesse moyenne de la particule. En quoi ce résultat est-il paradoxal ?

6 - Exprimer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule.

7 - La trajectoire de la particule est une cycloïde, représentée figure 4. Déterminer ses paramètres géométriques a et b. Étudier les instants auxquels y est extrémal, et expliquer la différence d'allure en ces points.

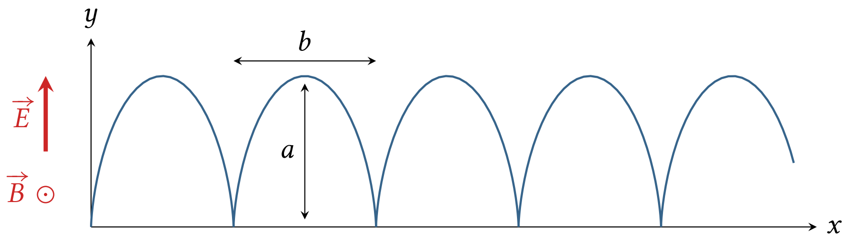


Figure 4 – Trajectoire de la particule dans deux champs croisés.