

# Signal et spectre

## Document 1 : Chaîne de transmission d'un signal

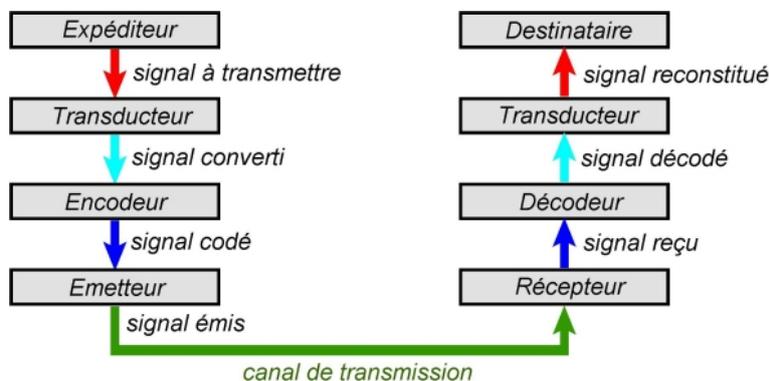


Figure 1 – Schéma général d'une chaîne de transmission.

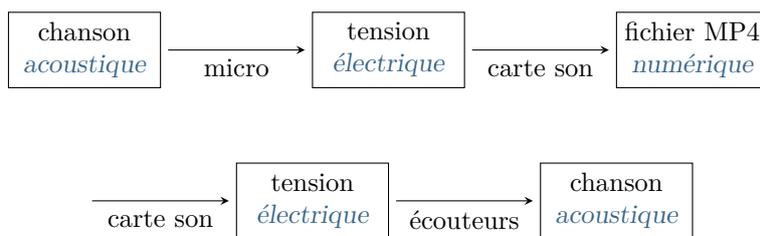


Figure 2 – Schéma général d'une chaîne de transmission.

## Document 2 : Exemples de synthèse spectrale

Le théorème de Fourier appliqué à un signal périodique indique qu'un tel signal  $s(t)$ , de fréquence  $f$  et de forme quelconque, peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de  $f$ . Mathématiquement,

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

où les constantes positives  $A_n$ , de même dimension que  $s$ , sont l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$  et les constantes  $\varphi_n$  sont la phase initiale de cette même harmonique.

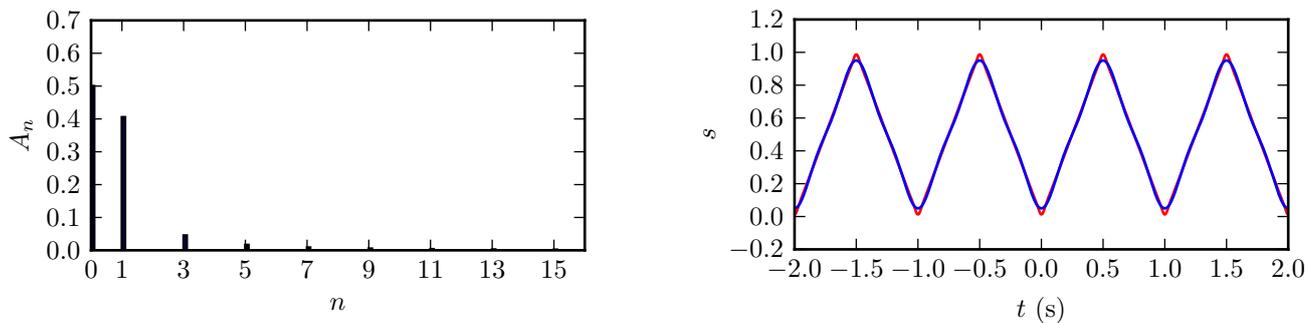
Pour fixer les idées, on considère deux signaux de même fréquence  $f = 1\text{ Hz}$  et compris entre 0 et 1. Pour comprendre l'influence des différentes harmoniques sur le chronogramme, on s'intéresse à des sommes tronquées : au lieu d'aller jusqu'à l'infini, la somme est limitée à un nombre  $N$  d'harmoniques.

### Signal triangle

Les coefficients de Fourier du signal triangle s'obtiennent par

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \pi \quad \text{pour tout } n$$

La figure 3 représente, à gauche le spectre du signal triangle, et à droite des sommes de Fourier restreintes. Seules quelques harmoniques suffisent à reproduire fidèlement l'allure du signal.



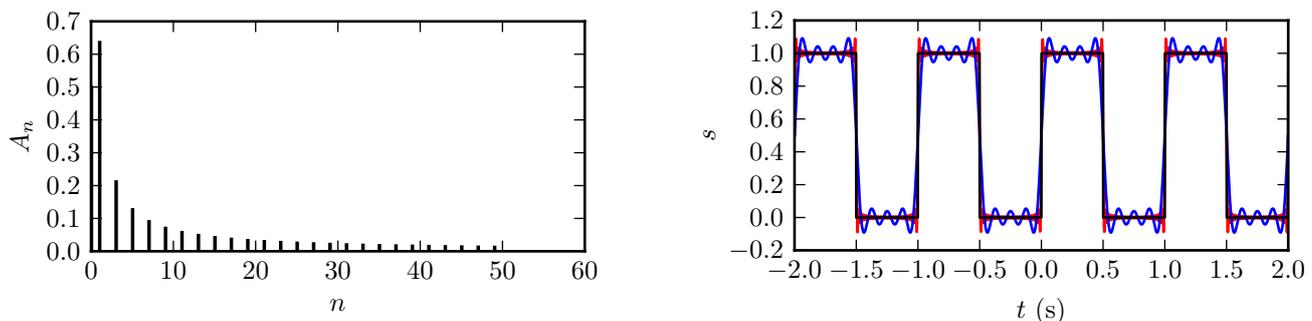
**Figure 3 – Synthèse spectrale d'un signal triangle.** Les sommes de Fourier sont restreintes respectivement aux trois premières (en bleu) et quinze premières (en rouge) harmoniques. Le signal triangle de référence est également représenté en noir, mais la différence avec le signal à quinze harmoniques n'est presque pas perceptible.

## Signal créneau

Les coefficients de Fourier du signal créneau s'obtiennent par

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_n = -\pi/2 \quad \text{pour tout } n$$

La figure 4 représente, à gauche le spectre du signal créneau, et à droite des sommes de Fourier restreintes.



**Figure 4 – Synthèse spectrale d'un signal créneau.** Les sommes de Fourier sont restreintes respectivement aux cinq premières (en bleu) et cinquante premières (en rouge) harmoniques. Le signal créneau de référence est également représenté en noir.

Pour obtenir une très bonne ressemblance entre le signal créneau de référence et une somme de Fourier restreinte, il faut considérer un nombre d'harmoniques beaucoup plus grand que dans le cas du signal triangle, typiquement quelques milliers pour que la différence ne soit plus distinguable à l'œil. Cette différence est due au fait que les variations du signal créneau sont beaucoup plus brutales que celles du signal triangle.

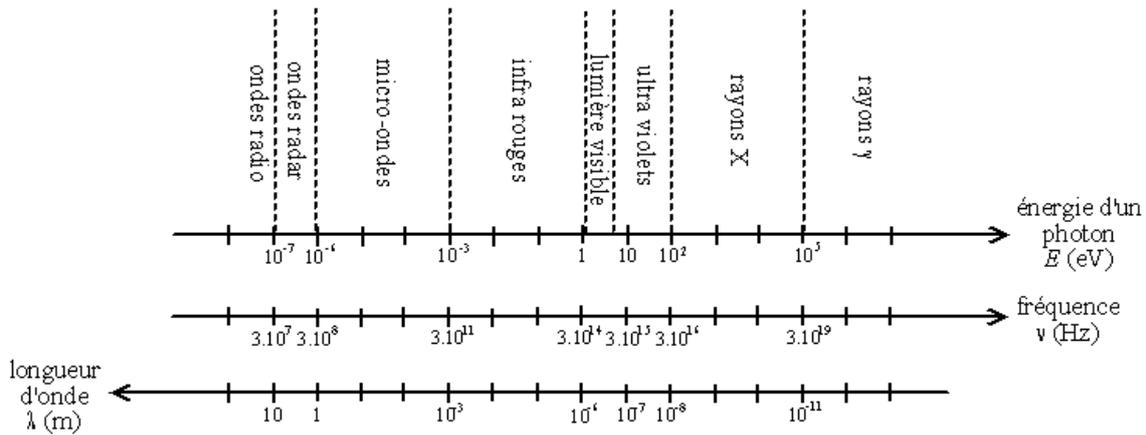
Le script Python ayant servi à générer ces figures est disponible sur le site de la classe.

## Document 3 : Spectre électromagnétique

Les ordres de grandeur rencontrés en électromagnétisme s'étalent sur une très grande plage, voir figure 5. La notion de spectre optique sera précisée ultérieurement dans le cours.

Les choix de bande de fréquences affectée aux diverses applications sont d'une part historiques, puisqu'un nouveau système ne doit pas perturber un dispositif déjà existant, mais résultent également de critères techniques. En particulier, la longueur d'onde joue un rôle critique dans le fonctionnement des systèmes utilisant des antennes. Notons que l'affectation d'une bande de fréquence à un type d'application est du ressort de la loi, car elle est considérée comme un partage du domaine public. Par exemple,

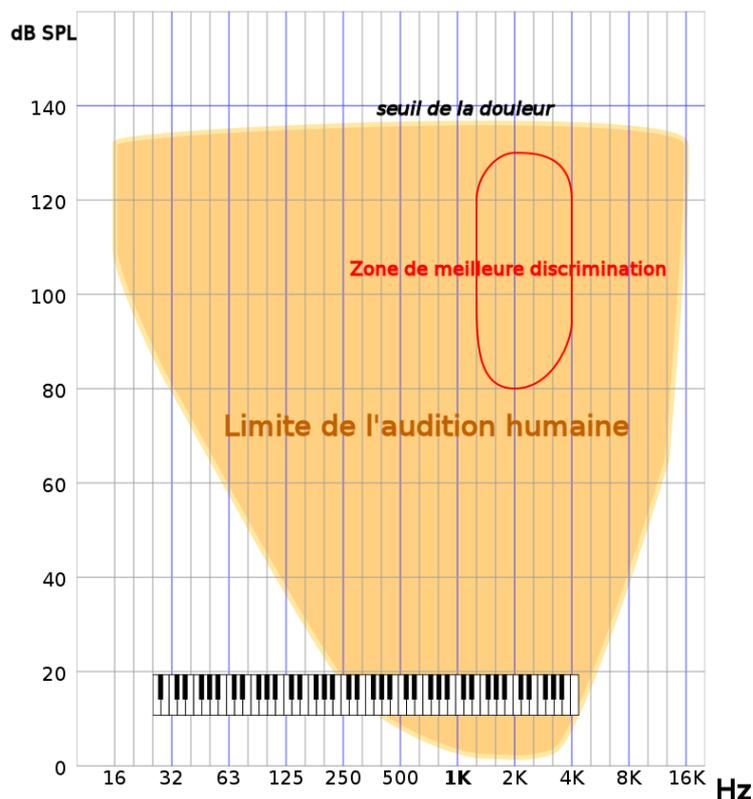
- ▷ le transport des signaux radiophoniques utilise des ondes radio, dont la fréquence porteuse est de l'ordre de la centaine de mégahertz pour la bande FM : la fréquence « 107.7 » de Autoroute Info indique une porteuse de fréquence 107,7 MHz ;
- ▷ la TNT exploite un domaine spectral de fréquences supérieures, comprises entre 470 et 790 MHz ;
- ▷ la téléphonie mobile utilise des ondes de fréquences encore plus élevées, de l'ordre du gigahertz ( $10^9$  Hz) ;
- ▷ le réseau WiFi (« wireless fidelity », par analogie avec HiFi) repose lui sur l'utilisation de deux bandes de fréquences, la première autour de 2,4 GHz et la deuxième à un peu plus de 5 GHz.



**Figure 5 – Spectre électromagnétique.** Les correspondances en longueur d'onde et énergie des photons seront discutées dans la suite de l'année. Figure extraite de Wikipédia.

## Document 4 : Spectre acoustique

La fréquence des signaux acoustiques audibles court de quelques dizaines de hertz à une quinzaine de kilohertz, voir figure 6, cette dernière valeur étant très variable en fonction de l'âge et d'éventuels dommages causés à l'oreille par exposition à des bruits trop intenses.



**Figure 6 – Diagramme des fréquences audibles.** Le clavier de piano indique la correspondance entre fréquence et note de musique. Figure extraite de Wikipédia, version couleur sur le site de la classe.

En fonction de la qualité requise, des intervalles différents sont retenus pour les multiples applications :

- ▷ la norme HiFi (« high fidelity »), qui vise une excellente restitution du son, retient la plage 20 Hz – 20 kHz ;
- ▷ en téléphonie mobile, le souhait de limiter la plage allouée à chaque communication en vue d'en transmettre un grand nombre sur les mêmes équipements conduit à restreindre très fortement cette plage : on se contente couramment d'une plage allant de 300 Hz à 3400 Hz, et même moins en tenant compte des algorithmes de compression ;
- ▷ les annonces sonores pré-enregistrées dans les lieux publics exploitent souvent une bande passante encore plus étroite, ce qui permet de diminuer la taille du fichier correspondant à chaque annonce ... au détriment de la qualité acoustique du message.