

Second principe : bilans d'entropie

Données pour tous les exercices : « ref » désigne un état de référence.

▷ Entropie d'un système condensé de capacité thermique C :

$$S = S_{\text{ref}} + C \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}};$$

▷ Entropie d'un gaz parfait :

$$S = S_{\text{ref}} + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} + nR \ln \frac{V}{V_{\text{ref}}} = S_{\text{ref}} + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_{\text{ref}}} - nR \ln \frac{P}{P_{\text{ref}}} = S_{\text{ref}} + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{P}{P_{\text{ref}}} + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{V}{V_{\text{ref}}}.$$

Exercices

Exercice 1 : Contact thermique entre deux solides

[◆◆◆]

Deux solides de capacités thermiques respectives C_1 et C_2 et de températures initiales T_{i1} et T_{i2} sont mis en contact. Des parois rigides calorifugées isolent l'ensemble de l'extérieur.

1 - Déterminer la température finale T_f .

2 - Calculer la variation d'entropie du système global et calculer l'entropie créée au cours de la transformation

Exercice 2 : Équilibre d'une enceinte à deux compartiments

[◆◆◆]

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison d'aire S étanche, diatherme et mobile sans frottement. Les deux compartiments contiennent un même gaz parfait. Dans l'état initial, la cloison est maintenue au milieu de l'enceinte. Le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, P_0, V_0) et le gaz du compartiment 2 dans l'état $(T_0, 2P_0, V_0)$. On laisse alors la cloison bouger librement jusqu'à ce que le système atteigne un état d'équilibre.

1 - Déterminer l'état final.

2 - Calculer l'entropie créée.

Exercice 3 : Effet Joule

[◆◆◆]

Considérons une masse $m = 100$ g d'eau dans laquelle plonge un conducteur de résistance $R = 20 \Omega$. L'ensemble forme un système noté \mathcal{S} , de température initiale $T_0 = 20^\circ\text{C}$. On impose au travers de la résistance un courant $I = 1$ A pendant une durée $\tau = 10$ s. L'énergie électrique dissipée dans la résistance peut être traitée du point de vue de la thermodynamique comme un transfert thermique Q_{elec} reçu par \mathcal{S} .

Données :

▷ Capacité thermique de la résistance : $C_R = 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;

▷ Capacité thermique massique de l'eau : $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1 - La température de l'ensemble est maintenue constante. Quelle est la variation d'entropie du système \mathcal{S} ? Quelle est l'entropie créée?

2 - Commenter le signe de l'entropie créée. Que peut-on en déduire à propos du signe d'une résistance?

3 - Le même courant passe dans le même conducteur pendant la même durée, mais cette fois \mathcal{S} est isolé thermiquement. Calculer sa variation d'entropie et l'entropie créée.

Exercice 4 : Possibilité d'un cycle

[◆◆◆]

On raisonne sur une quantité de matière $n = 1$ mol de gaz parfait qui subit la succession de transformations (idéalisées) suivantes :

- ▷ $A \rightarrow B$: détente isotherme de $P_A = 2$ bar et $T_A = 300$ K jusqu'à $P_B = 1$ bar en restant en contact avec un thermostat de température $T_0 = T_A$;
- ▷ $B \rightarrow C$: évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5$ L toujours en restant en contact avec le thermostat à T_0 ;
- ▷ $C \rightarrow A$: compression adiabatique réversible jusqu'à revenir à l'état A .

Le coefficient isentropique γ est pris égal à $7/5$.

- 1 - Représenter ce cycle dans le diagramme de Watt (P, V).
- 2 - À partir du diagramme, déterminer le signe du travail total des forces de pression au cours du cycle. En déduire s'il s'agit d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur.
- 3 - Déterminer l'entropie créée entre A et B . Commenter.
- 4 - Calculer la température en C , le travail W_{BC} et le transfert thermique Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC . En déduire l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que l'entropie créée. Conclure : le cycle proposé est-il réalisable ? Le cycle inverse l'est-il ?

Exercice 5 : Résistance thermique

[◆◆◆]

On considère un barreau cylindrique homogène, de longueur L et de section S , dont les deux extrémités sont mises en contact avec deux thermostats qui les maintiennent à des températures T_1 et T_2 . La paroi cylindrique est calorifugée, de telle sorte qu'aucune fuite thermique n'a lieu latéralement.

Après un régime transitoire auquel nous n'allons pas nous intéresser ici, la température en chaque point M du barreau tend vers une valeur constante, dépendant de M : un régime stationnaire mais hors équilibre est atteint. On raisonne sur une durée Δt lorsque le régime stationnaire est établi. On constate alors que la puissance thermique \mathcal{P}_{th} (transfert thermique par unité de temps) traversant toute section droite du cylindre, orientée de la face 1 vers la face 2, s'écrit

$$\mathcal{P}_{th} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

où R_{th} est un coefficient phénoménologique appelé résistance thermique.

- 1 - Par analogie avec la loi d'Ohm donnant l'intensité I en fonction de la différence de potentiel $U = V_2 - V_1$ aux bornes d'un conducteur ohmique, justifier l'appellation de résistance thermique. Quelle est la dimension de R_{th} ?

On considère comme système l'ensemble du barreau cylindrique, la surface de contrôle étant constituée des deux extrémités circulaires et de la paroi cylindrique.

- 2 - Quelle est la variation d'entropie ΔS du barreau cylindrique au cours de l'intervalle de temps Δt ?
- 3 - Exprimer l'entropie échangée $S_{éch}$ par le cylindre pendant Δt , et le taux d'échange d'entropie $\sigma_{éch} = S_{éch}/\Delta t$.
- 4 - En déduire le taux de création d'entropie σ_{cr} . Que devient cette entropie créée ?
- 5 - Quelle conséquence cela impose-t-il sur le signe de R_{th} ?

Annale de concours**Exercice 6 : Masse posée sur un piston**

[oral banque PT, ◆◆◆]

Considérons une enceinte hermétique, diatherme, fermée par un piston de masse négligeable pouvant coulisser sans frottement. Cette enceinte contient un gaz supposé parfait. Elle est placée dans l'air, à température T_0 et pression P_0 .

- 1 - On place une masse m sur le piston. Déterminer les caractéristiques du gaz une fois l'équilibre thermique et mécanique atteint.
- 2 - Déterminer le transfert thermique échangé Q et l'entropie créée.
- 3 - On réalise la même expérience, mais en N étapes successives, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ». Déterminer l'entropie créée dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Second principe : bilans d'entropie

Exercices

Exercice 1 : Contact thermique entre deux solides

1 Le système composé de l'association des deux solides est isolé, donc d'après le premier principe son énergie interne se conserve ($W = Q = 0$). Par additivité, la variation d'énergie interne totale est la somme des variations d'énergie interne des solides 1 et 2,

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2.$$

Comme il n'y a qu'un changement de température de chaque solide, et comme on sait qu'à l'état final la température de chaque solide est égale à T_f , ces variations s'expriment facilement, ce qui donne

$$0 = C_1(T_f - T_{i1}) + C_2(T_f - T_{i2}) \quad \text{d'où} \quad T_f = \frac{C_1 T_{i1} + C_2 T_{i2}}{C_1 + C_2}.$$

2 On raisonne de même par additivité de l'entropie,

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

et comme l'expression de la fonction d'état entropie est donnée,

$$\Delta S = \left(C_1 \ln \frac{T_f}{T_{\text{ref}}} - C_1 \ln \frac{T_{i1}}{T_{\text{ref}}} \right) + \left(C_2 \ln \frac{T_f}{T_{\text{ref}}} - C_2 \ln \frac{T_{i2}}{T_{\text{ref}}} \right) \quad \text{d'où} \quad \Delta S = C_1 \ln \frac{T_f}{T_{i1}} + C_2 \ln \frac{T_f}{T_{i2}}.$$

Comme le système est calorifugé ($Q = 0$) il n'échange pas d'entropie avec l'extérieur : la variation d'entropie est exclusivement due à une création, donc

$$S_{\text{cr}} = C_1 \ln \frac{T_f}{T_{i1}} + C_2 \ln \frac{T_f}{T_{i2}}.$$

Vérifier que $S_{\text{cr}} > 0$ n'est pas immédiat, mais on peut s'en rendre compte facilement dans le cas $C_1 = C_2$.

Exercice 2 : Équilibre d'une enceinte à deux compartiments

1 Considérons le système formé des deux gaz dans les deux compartiments et de la cloison. Comme la cloison est diatherme et mobile sans frottement, alors les deux gaz seront en équilibre thermique et mécanique à l'état final, d'où on déduit directement

$$T_{1F} = T_{2F} \stackrel{\text{déf.}}{=} T_F \quad \text{et} \quad P_{1F} = P_{2F} \stackrel{\text{déf.}}{=} P_F.$$

En revanche, les volumes V_1 et V_2 des compartiments sont a priori différents. Enfin, la loi des gaz parfaits et les conditions initiales montrent que la quantité de matière diffère dans les deux compartiments : $n_2 = 2n_1$. Comme le piston est étanche, elle ne change pas au cours de la transformation. Pour unifier les notations, on notera $n_1 = n_0$. En résumé, les états des gaz sont :

- ▷ Gaz 1 : état initial (n_0, T_0, P_0, V_0) , état final (n_0, T_F, P_F, V_1) ;
- ▷ Gaz 2 : état initial $(2n_0, T_0, 2P_0, V_0)$, état final $(2n_0, T_F, P_F, V_2)$.

Par additivité de l'énergie interne,

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{\text{cloison}} \simeq \Delta U_1 + \Delta U_2$$

en supposant que la cloison, solide, est de masse suffisamment faible pour que son énergie interne ne varie presque pas.

Il est cependant indispensable de l'inclure dans le système, sans quoi il faut également prendre en compte le travail fourni par la cloison aux gaz pendant le déplacement, ce qui complique singulièrement

| les choses.

D'après le premier principe,

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = W + Q = 0$$

car l'enceinte est indéformable et calorifugée.

| *Attention à ne pas confondre : il y a échange de travail et de transfert thermique d'un gaz à l'autre (sans quoi il n'y aurait pas de transformation), mais compte tenu du système considéré ce sont des échanges intérieurs, qui n'apparaissent pas dans le bilan d'énergie.*

Quelle que soit la transformation, les variations d'énergie interne d'un gaz parfait sont reliées aux variations de température par la capacité thermique à volume constant (et ce, même si l'évolution n'est pas isochore ... c'est propre au gaz parfait!). Ainsi,

$$\Delta U_{1,2} = C_{V1,2}(T_F - T_0) \quad \text{d'où} \quad (C_{V1} + C_{V2})(T_F - T_0) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{T_F = T_0}$$

Pour calculer les pressions et les volumes, on utilise l'équation d'état,

$$P_F V_1 = n_0 R T \quad \text{et} \quad P_F V_2 = 2n_0 R T \quad \text{d'où} \quad V_2 = 2V_1.$$

Comme l'enceinte est indéformable, alors on a également $V_1 + V_2 = 2V_0$, ce qui permet de conclure

$$\boxed{V_1 = \frac{2}{3}V_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{4}{3}V_0.}$$

Enfin, l'équation d'état permet d'aboutir à la pression, dont on rappelle qu'elle est égale dans les deux compartiments,

$$\boxed{P_F = \frac{3n_0 R T_0}{2V_0}.}$$

| *L'idée pour la fin de question, une fois les températures trouvées, est de déterminer les trois variables d'état manquantes V_1, V_2 et P_F en utilisant trois équations indépendantes : l'équation d'état des gaz parfaits appliquée aux deux compartiments donne deux équations, la conservation du volume donne la troisième. La tambouille des calculs peut ensuite être faite de multiples façons.*

2 La variation d'entropie du système s'obtient facilement par extensivité et utilisation de la fonction d'état donnée (à température constante, ce qui permet de simplifier directement)

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= \left(n_0 R \ln \frac{V_1}{V_{\text{ref}}} - n_0 R \ln \frac{V_0}{V_{\text{ref}}} \right) + \left(2n_0 R \ln \frac{V_2}{V_{\text{ref}}} - 2n_0 R \ln \frac{V_0}{V_{\text{ref}}} \right) \\ &= n_0 R \ln \frac{V_1}{V_0} + n_0 R \ln \left(\frac{V_2}{V_0} \right)^2 \\ &= n_0 R \left[\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{16}{9} \right] \\ \Delta S &= n_0 R \ln \frac{32}{27} \end{aligned}$$

Comme la transformation est adiabatique, le système n'échange pas d'entropie avec l'extérieur, donc $\Delta S = S_{\text{créé}}$ d'où

$$\boxed{S_{\text{créé}} = n_0 R \ln \frac{32}{27}}$$

dont on remarque qu'elle est bien strictement positive, comme imposé par le second principe.

| *Il y a également de l'entropie échangée entre les deux gaz, mais là encore ce sont des échanges internes qui n'apparaissent donc pas dans le bilan entropique global.*

Exercice 3 : Effet Joule

1 Modélisons l'eau et la résistance par deux phases condensées idéales. Leur entropie ne dépend que de la température, et comme la transformation est isotherme à $T_0 = 293 \text{ K}$, alors

$$\Delta S = \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_R = 0.$$

Pour calculer l'entropie créée, il faut d'abord calculer l'entropie échangée par \mathcal{S} et donc le transfert thermique reçu. Comme la transformation est isotherme, c'est qu'il y a échange de transfert thermique en plus du transfert thermique d'origine électrique. Pour le déterminer, appliquons le premier principe à \mathcal{S} , dont la transformation est monobare,

$$\Delta H = Q_{\text{élec}} + Q_{\text{autre}}.$$

Compte tenu de la modélisation de \mathcal{S} par deux phases condensées idéales, son énergie interne ne dépend que de la température, donc comme la transformation est isotherme $\Delta U = 0$. Ainsi,

$$Q_{\text{autre}} = -Q_{\text{élec}} = -RI^2 \tau.$$

Comme $\Delta S = 0$, on en déduit

$$S_{\text{créée}} = -S_{\text{éch}} = -\frac{Q_{\text{autre}}}{T} \quad \text{d'où} \quad S_{\text{créée}} = \frac{RI^2 \tau}{T} = 0,68 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1},$$

ce qui est positif, comme imposé par le second principe.

Le statut donné à $Q_{\text{élec}}$ est ambigu : faut-il considérer qu'il est associé à un échange d'entropie ? Sous quelle forme ? L'usage est plutôt de considérer l'entropie échangée par le système comme celle échangée avec l'extérieur, soit uniquement le transfert thermique Q_{autre} .

Une autre façon équivalente de le dire est de parler de « travail électrique » plutôt que de « transfert thermique électrique ». Cela est sans doute moins intuitif mais plus cohérent : la résistance fait partie intégrante du système, et reçoit de l'énergie de la part du générateur ... dont il est clair qu'il ne fournit pas de transfert thermique !

Finalement, le plus explicite serait peut être d'écrire le premier principe sous la forme $\Delta H = W_{\text{méca}} + Q + \mathcal{E}_{\text{élec}}$, avec $\mathcal{E}_{\text{élec}}$ l'énergie électrique reçue par le système, qui prend une forme différente d'un travail mécanique $W_{\text{méca}}$ ou d'un transfert thermique Q ... ceci étant, je ne l'ai quasiment jamais vu écrit comme tel.

2 Le signe de la résistance contraint le signe de la variation d'entropie : toutes les autres grandeur intervenant sont forcément positives. Comme le second principe impose que $S_{\text{créée}}$ soit positive, on en déduit qu'il impose par ce biais **qu'une résistance électrique est forcément positive** également.

3 La transformation est désormais adiabatique. Le premier principe s'écrit donc

$$\Delta H = Q_{\text{élec}} + 0$$

et en exprimant la variation d'énergie interne des phases condensées entre les températures initiale et finale,

$$(mc_{\text{eau}} + C_R) \Delta T = RI^2 \tau \quad \text{d'où} \quad T_f = T_i + \frac{RI^2 \tau}{mc_{\text{eau}} + C_R}.$$

La variation d'entropie s'obtient à partir de l'expression donnée en entête de l'énoncé,

$$\Delta S = S_{\text{créée}} = (mc_{\text{eau}} + C_R) \ln \frac{T_f}{T_i}$$

soit

$$\Delta S = S_{\text{créée}} = (mc_{\text{eau}} + C_R) \ln \left(1 + \frac{RI^2 \tau}{(mc_{\text{eau}} + C_R) T_i} \right) = 6,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Il y a donc un facteur 10 d'écart avec la transformation précédente.

Exercice 4 : Possibilité d'un cycle

1 ▷ Pour placer le point A , calculons son volume,

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 12 \text{ L}$$

▷ Pour placer le point B , on applique de nouveau la loi des gaz parfaits avec $T_B = T_A$ car la transformation est isotherme,

$$V_B = \frac{nRT_A}{P_B} = 25 \text{ L}$$

▷ Les deux coordonnées du point C sont connues.

▷ Pour tracer les courbes, on sait que l'allure d'une isotherme d'un gaz parfait est une hyperbole car $P \propto 1/V$ et qu'une adiabatique réversible (partie AC) est plus pentue car $P \propto 1/V^\gamma$ avec $\gamma > 1$.

Le cycle complet est représenté dans le diagramme de Watt figure 1.

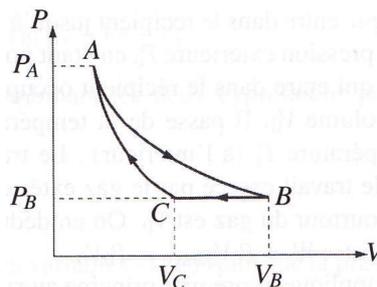


Figure 1 – Cycle étudié vu dans le diagramme de Watt.

2 En valeur absolue, le travail des forces de pression au cours d'une transformation correspond à l'aire sous la courbe représentant cette transformation dans le diagramme de Watt. Il est positif si le volume diminue au cours de la transformation et négatif s'il augmente. Ici, les deux transformations BC et CA comptent positivement et la transformation AB compte négativement. On voit sur le diagramme que l'aire sous AB est supérieure à la somme des aires sous BC et CA , **le travail des forces de pression est globalement négatif sur l'ensemble du cycle**. Cela indique que le système fournit effectivement du travail à l'extérieur : **il s'agit d'un moteur**.

Résultat à retenir et dont on parlera dans le chapitre sur les machines thermiques : dans le diagramme de Watt, un cycle parcouru dans le sens horaire est toujours un cycle moteur.

3 La transformation AB est une isotherme, le plus judicieux pour calculer la variation d'entropie ΔS_{AB} est donc d'utiliser une expression de l'entropie impliquant T qui s'élimine, par exemple

$$\Delta S_{AB} = nR \ln \frac{P_A}{P_B}.$$

Calculons maintenant l'entropie échangée, à partir du transfert thermique et donc du premier principe,

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}.$$

Comme il s'agit d'une transformation isotherme d'un gaz parfait,

$$\Delta U_{AB} = C_V \Delta T = 0 \quad \text{donc} \quad Q_{AB} = -W_{AB}$$

Calculons alors le travail échangé W_{AB} en supposant la transformation quasi-statique,

$$W_{AB} = - \int_{AB} P_{\text{ext}} dV \underset{\text{quasi-stat}}{=} - \int_{AB} P dV \underset{\text{GP}}{=} - \int_{AB} nRT \frac{dV}{V} \underset{\text{isotherme}}{=} -nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

ce qui conduit finalement à

$$W_{AB} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} \underset{\text{éq d'état}}{=} nRT_A \ln \frac{P_B}{P_A}$$

et enfin à

$$Q = -nRT_A \ln \frac{P_B}{P_A}$$

On en déduit l'entropie échangée avec le thermostat de température $T_0 = T_A$ au cours de la transformation AB ,

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q_{AB}}{T_0} = nR \ln \frac{P_B}{P_A}.$$

On remarque alors que $\Delta S = S_{\text{éch}}$, c'est-à-dire que $S_{\text{créé}} = 0$: **la transformation AB est réversible.**

4 D'après l'équation d'état du gaz parfait,

$$T_C = \frac{P_B V_C}{nR} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

La transformation est isobare, donc le travail reçu s'écrit

$$W_{BC} = -P_B(V_C - V_B) = 4,4 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

Enfin, le transfert thermique se déduit du premier principe, par exemple en termes d'enthalpie,

$$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P(T_C - T_B) \quad \text{d'où} \quad Q_{BC} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) = -1,6 \text{ kJ}.$$

L'entropie échangée s'en déduit directement,

$$S_{\text{éch},BC} = \frac{Q_{BC}}{T_0} = -5,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Pour calculer l'entropie créée, il faut d'abord calculer la variation d'entropie du gaz entre B et C , ce qui se fait avec les expressions données. Comme la transformation est isobare, le plus astucieux est d'utiliser une expression dépendant de P puisque les termes associés se compensent. On en déduit

$$\Delta S_{BC} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_C}{T_B} = -5,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Enfin, on en déduit l'entropie créée,

$$S_{\text{créé},BC} = \Delta S_{BC} - S_{\text{éch},BC} = -0,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} < 0.$$

L'entropie créée au cours de l'étape BC serait donc négative, ce qui est absolument impossible. **Le cycle proposé est donc irréalisable.** En revanche, le cycle inverse est possible car deux transformations sont réversibles et la troisième associée à une création d'entropie, ce qui est permis par le second principe.

Exercice 5 : Résistance thermique

1 La loi d'Ohm aux bornes d'un conducteur s'écrit $U = RI$ soit $I = (V_2 - V_1)/R$. L'intensité I s'interprète alors comme la charge électrique traversant une section droite du conducteur par unité de temps. On retrouve des quantités analogues ici, la puissance thermique jouant le rôle de l'intensité, et la différence de température le rôle de la tension.

La résistance thermique ne s'exprime pas en ohms! Raisonnons par analyse dimensionnelle, par exemple avec les unités,

$$[R_{\text{th}}] = \frac{[T]}{[\mathcal{P}_{\text{th}}]} = \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2 En régime stationnaire, l'état du cylindre ne varie pas. Comme l'entropie est une fonction d'état, on en déduit

$$\Delta S = 0.$$

3 Comme la surface latérale est calorifugée, tout le transfert thermique se fait aux deux surfaces (1) et (2) et vaut $Q = \pm \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$. D'après la définition donnée de \mathcal{P}_{th} , la surface est orientée de (1) vers (2), donc

$$Q_1 = +\mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t \quad \text{et} \quad Q_2 = -\mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$$

car il s'agit de transferts thermiques reçus. On en déduit alors l'entropie échangée,

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

donc

$$S_{\text{éch}} = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \Delta t \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{S_{\text{éch}} = -\frac{(T_2 - T_1)^2}{R_{\text{th}}} \Delta t,}$$

et le taux de création d'entropie,

$$\boxed{\sigma_{\text{éch}} = -\frac{(T_2 - T_1)^2}{R_{\text{th}}}.}$$

4 L'entropie créée et le taux de création de l'entropie se déduisent directement du caractère constant de l'entropie du barreau. Comme $\Delta S = 0 = S_{\text{cr}} + S_{\text{éch}}$ alors $S_{\text{cr}} = -S_{\text{éch}}$, donc

$$\boxed{S_{\text{cr}} = \frac{(T_2 - T_1)^2}{R_{\text{th}}} \Delta t \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{cr}} = \frac{(T_2 - T_1)^2}{R_{\text{th}}}.}$$

Comme il n'y a pas d'accumulation d'entropie dans le barreau solide, cette entropie créée est donnée au thermostat de plus basse température par transfert thermique.

5 D'après le second principe, l'entropie créée au cours de toute transformation est positive ou nulle. On en déduit que le signe de R_{th} est contraint,

$$\boxed{R_{\text{th}} \geq 0.}$$

Annale de concours

Exercice 6 : Masse posée sur un piston

[oral banque PT]

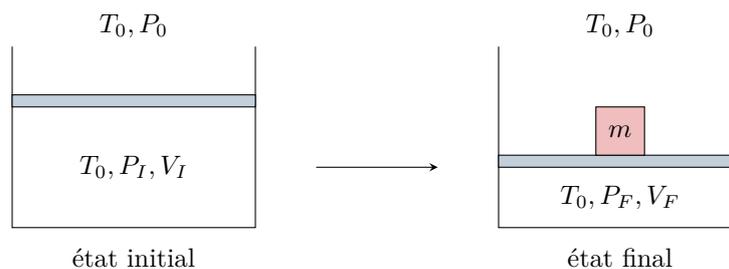


Figure 2 – Schéma de principe de la transformation.

1 L'enceinte est diatherme, donc

$$\boxed{T_F = T_I = T_0.}$$

La condition d'équilibre mécanique du piston (surface S , masse négligée) dans l'état initial et final donne

$$P_I S = P_0 S \quad \text{et} \quad P_F S = P_0 S + mg$$

d'où on déduit

$$\boxed{P_F = P_0 + \frac{mg}{S}.}$$

Enfin, l'équation d'état donne

$$\boxed{V_F = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{mg}{S}}.}$$

2 • **Calcul du transfert thermique** : On raisonne sur un système constitué du gaz contenu dans l'enceinte et du piston. Il est soumis à la pression extérieure P_0 et à la force exercée par la masse m , qui peut s'interpréter comme un surplus de pression mg/S . Ainsi, le système est soumis à une pression apparente

$$P_{\text{app}} = P_0 + \frac{mg}{S}$$

qui demeure constante. Le travail reçu par le système vaut donc

$$W = - \int_{I \rightarrow F} P_{\text{app}} dV = - \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) (V_F - V_I).$$

Or d'après la première loi de Joule,

$$\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{piston}} = 0 + 0$$

car $T_F = T_I$. Ainsi, d'après le premier principe, $W + Q = 0$ soit

$$\begin{aligned} Q &= \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) (V_F - V_I) \\ &= \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) nRT_0 \left(\frac{1}{P_0 + \frac{mg}{S}} - \frac{1}{P_0} \right) \\ &= \left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) nRT_0 \left(\frac{-mg/S}{\left(P_0 + \frac{mg}{S} \right) P_0} \right) \end{aligned}$$

$$Q = -\frac{nRT_0}{P_0} \frac{mg}{S}.$$

• **Calcul de l'entropie créée** : par additivité,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{piston}}.$$

Comme $T_F = T_I$ alors $\Delta S_{\text{piston}} = 0$, donc

$$\Delta S = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_F}{T_I} - nR \ln \frac{P_F}{P_I} = -nR \ln \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right).$$

On en déduit l'entropie créée,

$$S_{\text{créée}} = \Delta S - S_{\text{éch}} = \Delta S - \frac{Q}{T_0}$$

soit

$$S_{\text{créée}} = nR \left(\frac{mg}{P_0 S} - \ln \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right) \right).$$

3 Dans le cas où la transformation est réalisée en $N \gg 1$ étapes, une masse m/N est ajoutée à chaque étape. Au cours d'une étape, on a donc création de

$$S_{\text{créée},1} = nR \left(\frac{mg/N}{P_0 S} - \ln \left(1 + \frac{mg/N}{P_0 S} \right) \right).$$

Si N est suffisamment grand, un développement limité est possible,

$$S_{\text{créée},1} = nR \left(\frac{mg/N}{P_0 S} - \frac{mg/N}{P_0 S} + \frac{1}{2} \left(\frac{mg/N}{P_0 S} \right)^2 \right) = \frac{nR}{2} \left(\frac{mg}{NP_0 S} \right)^2.$$

Sur l'ensemble de la transformation,

$$S_{\text{créée}} = N S_{\text{créée},1} = \frac{nR}{2N} \left(\frac{mg}{P_0 S} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi, lorsqu'elle est réalisée suffisamment lentement, **la transformation tend vers une transformation réversible**.

Attention ! Comme le terme d'ordre le plus bas du développement limité s'annule, il est nécessaire de poursuivre à l'ordre suivant pour obtenir un résultat correct.

On peut également reprendre la méthode de la question précédente, mais la transformation n'est plus monobare, ce qui change donc le calcul du transfert thermique.