BLAISE PASCAL
PT 2018-2019

TD 8 – Thermodynamique industrielle *Correction*

Description des écoulements stationnaires

Exercices

Exercice 1 : Profondeur de la Seine à Rouen

On raisonne évidemment en ordre de grandeur de vitesse débitante U. Par définition du débit volumique,

$$D_\mathrm{v} = S\,U = L\,h\,U \qquad \text{donc} \qquad \boxed{h = \frac{D_\mathrm{v}}{LU} \simeq 2\,\mathrm{m}\,.}$$

Exercice 2 : Robinet

1 L'eau accélère sous l'effet de la pesanteur. Comme elle est incompressible, il y a conservation du débit volumique Sv au cours de l'écoulement : une augmentation de vitesse impose une réduction de section du jet.

2 En supposant le jet cylindrique, la conservation du débit volumique s'écrit

$$\left(\pi\frac{d_1^2}{4}\right)v_1 = \left(\pi\frac{d_2^2}{4}\right)v_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 v_1 \simeq 3v_1\,.}$$

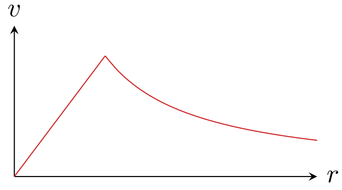
La vitesse a quasiment triplé.

Exercice 3 : Tornade

1 Par continuité de la vitesse en $r = a$,

$$\omega a = \frac{K}{a} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{K = \omega a^2\,.}$$

2 Voir figure 1. Les lignes de courant sont des cercles.



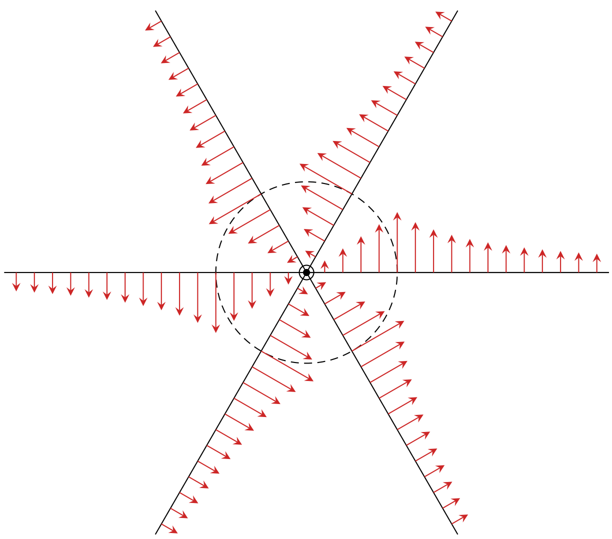


Figure 1 – Champ des vitesses d'une tornade.

3 Comme $v_r = 0$, on a directement $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, l'écoulement est donc incompressible.

4 Pour $r < a$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\omega r^2}{\mathrm{d}r} \vec{e}_z = \frac{1}{r} \times 2r\omega \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z \,.$$

L'écoulement est donc tourbillonnaire dans le cœur de la tornade. Pour $r > a$,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r} \vec{e}_z = \vec{0} \,,$$

l'écoulement est donc irrotationnel hors du cœur.

Exercice 4 : Houle

1 Souvenirs, souvenirs ... Il s'agit d'une onde progressive harmonique qui se déplace dans le sens des x croissants.

> ***Rappel de PTSI :*** *Le sens de propagation se voit au signe relatif devant k et ω.*

2 À l'instant $t = 0$,
- en $x = 0$, $\vec{v} = H\omega\, \mathrm{e}^{kz} \vec{u}_x$;
- en $x = \lambda/4$ on a $kx = \pi/2$ donc $\vec{v} = H\omega\, \mathrm{e}^{kz} \vec{u}_z$;
- en $x = \lambda/2$ on a $kx = \pi$ donc $\vec{v} = -H\omega\, \mathrm{e}^{kz} \vec{u}_x$.

Le champ de vitesse est donc partout exponentiellement croissant, mais sa direction change, voir figure 2.

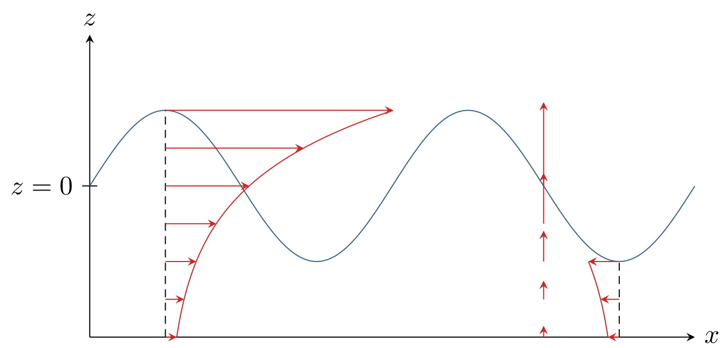


Figure 2 – Champ des vitesses de la houle à différentes positions.

3 Calculons la divergence,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -Hk\omega\, \mathrm{e}^{kz} \sin(kx - \omega t) + 0 + Hk\omega\, \mathrm{e}^{kz} \sin(kx - \omega t) = 0 \,.$$

L'écoulement de la houle est donc **incompressible**.

4 Calculons maintenant le rotationnel,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_x(x,z) \\ 0 \\ v_z(x,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y$$

d'où on déduit

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \left[Hk\omega\, \mathrm{e}^{kz} \cos(kx - \omega t) - Hk\omega\, \mathrm{e}^{kz} \cos(kx - \omega t) \right] \vec{u}_y = \vec{0} \,.$$

L'écoulement est donc **irrotationnel**.

Exercice 5 : Résistance hydraulique d'une conduite

1 Comme toujours avec ce genre d'équation, on ne développe surtout pas la dérivée mais on procède par intégrations successives. On réécrit et on procède à la première intégration,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta P}{\eta L}r \qquad \text{d'où} \qquad r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{2} + A$$

où A est une constante. De même,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r}{2} + \frac{A}{r} \qquad \text{d'où} \qquad v(r) = -\frac{\Delta P}{\eta L}\frac{r^2}{4} + A\ln r + B$$

avec B une constante également. Or il est clair que la vitesse ne diverge pas au centre de la conduite, donc $A = 0$. Le fluide étant visqueux, sa vitesse est nulle au contact d'une paroi fixe, donc

$$v(r=R) \underbrace{=}_{\text{CL}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{\Delta P}{4\eta L}R^2 + B$$

d'où on déduit

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2)\,.}$$

Le profil de vitesse est parabolique, maximal au centre de la conduite et nul sur les parois.

2 On considère une section $\mathcal{S}$ de normale $\vec{e}_z$. L'élément de surface en coordonnées cylindriques s'écrit $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\,\mathrm{d}\theta$. Le débit volumique s'écrit donc

$$\begin{aligned} D_\mathrm{v} &= \iint_\mathcal{S} \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^R (R^2 - r^2) r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \times \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R \\ &= \frac{\pi\,\Delta P}{2\eta L} \times R^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mathrm{v} = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P\,.}$$

3 Par analogie avec une résistance électrique, ΔP est l'analogue de $U = \Delta V$ et le débit volumique est l'analogue de l'intensité, qui n'est autre qu'un débit de charge. La différence de pression entraîne l'apparition d'un débit volumique, de même qu'une tension appliquée à une résistance entraîne l'apparition d'un courant. On peut également faire l'analogie avec la résistance thermique : une différence de température entraîne l'apparition d'un flux thermique.

> *Tous ces phénomènes qui se décrivent avec un formalisme voisin sont appelés « phénomènes de transport ». Ils recouvrent entre autres le transport de charges électriques, le transport de masse par un fluide, la diffusion thermique, ou encore la diffusion de matière (pas au programme de PT).*

À partir de l'expression précédente, il vient directement

$$\boxed{R_\mathrm{H} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\,.}$$

4 Si les conduites sont placées en série, tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule conduite de longueur $2L$, donc de résistance hydraulique doublée :

$$\boxed{D_{\mathrm{v,série}} = \frac{\Delta P}{2R_\mathrm{H}}\,.}$$

Si les conduites sont placées en parallèle, les débits volumiques au travers des deux conduites s'ajoutent donc

$$\boxed{D_{\mathrm{v,parallèle}} = \frac{2\,\Delta P}{R_\mathrm{H}}\,.}$$

On retrouve bien sûr les mêmes résultats que pour les résistances électriques.

Annales de concours

Exercice 6 : Glissement sur un plan incliné lubrifié [oral banque PT]

1 Le plus simple est de définir un axe x orienté le long de la pente vers le bas, et un axe y perpendiculaire à la pente vers le haut.

2 Le lubrifiant étant visqueux, sa vitesse est nulle en $y = 0$ et elle est égale à la vitesse V du solide en $y = e$. Le profil de vitesse dessiné étant clairement linéaire, on en déduit

$$\boxed{\vec{v} = v_x(y)\,\vec{e}_x = \frac{V}{e}y\,\vec{e}_x\,.}$$

3 La force visqueuse $\vec{F}$ tend à ralentir le solide dans son mouvement de glissement : on en déduit qu'elle est orientée selon $-\vec{e}_x$. De plus, en notant S la surface de contact entre le fluide et le solide, sa norme est donnée par

$$F = \eta S \left| \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=e} \right| = \eta S \frac{V}{e}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\vec{F} = -\eta S \frac{V}{e}\,\vec{e}_x\,.}$$

4
- **Système :** solide de masse M ;
- **Référentiel :** terrestre $\mathcal{R}$, considéré galiléen ;
- **Bilan des forces :**
  - ▷ Poids $\vec{P} = m\vec{g} = Mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - Mg\cos\alpha\,\vec{e}_y$;
  - ▷ Force de frottement exercée par le fluide : $\vec{F} = -\eta S\frac{V}{e}\,\vec{e}_x$;
  - ▷ Force de réaction normale du fluide : $\vec{R} = R\,\vec{e}_y$ (obligée car le solide ne peut pas traverser le fluide et le plan incliné ! ... et comme il n'est pas en contact avec le support, c'est forcément le fluide qui exerce la force).
- **Théorème de la résultante cinétique :** en notant $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$ la vitesse du solide,

$$M \left.\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}$$

soit en projection sur $\vec{e}_x$,

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = Mg\sin\alpha - \eta S\frac{V}{e}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\eta S}{Me}V = g\sin\alpha\,.}$$

La vitesse limite atteinte correspond à la solution particulière de l'équation différentielle,

$$\boxed{V_{\text{lim}} = \frac{Meg\sin\alpha}{\eta S}\,.}$$

Exercice 7 : Déplacement d'un piston à huile [oral banque PT]

1 L'estimation la plus simple est

$$\boxed{\mathrm{GP} = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}\,.}$$

2 La section au travers laquelle s'écoule le fluide est une couronne circulaire (un anneau) compris entre les rayons R_1 et R_2. Elle a pour surface $S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$. Le débit volumique vaut donc

$$\boxed{D_V = v_\mathrm{d} S = \pi\alpha\frac{P_1}{h}({R_2}^2 - {R_1}^2)\,.}$$

3 Raisonnons en coordonnées cylindriques. La force surfacique de viscosité subie par le cylindre intérieur a pour norme

$$F_\mathrm{surf} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1}\,.$$

Compte tenu des données à disposition, on peut approximer que l'ordre de grandeur de la vitesse dans l'interstice est v_d et que cette vitesse change sur une distance $R_2 - R_1$. Ainsi, en ordre de grandeur,

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R_1} \simeq \frac{v_\mathrm{d}}{R_2 - R_1} = \frac{\alpha P_1}{\eta h(R_2 - R_1)} \qquad \text{soit} \qquad F_\mathrm{surf} \simeq \frac{\alpha P_1}{h(R_2 - R_1)}\,.$$

En supposant que cette force surfacique est la même sur tout le cylindre, il vient

$$F_\mathrm{visq} = 2\pi R_1 h \times F_\mathrm{surf} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{F_\mathrm{visq} = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1}\,.}$$

4 Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté de la gauche vers la droite de la figure. Le piston est soumis

▷ à la force $\vec{F} = F\vec{u}$ exercée par l'opérateur ;
▷ à la force visqueuse $\vec{F}_\mathrm{visq} = -F_\mathrm{visq}\vec{u}$, orientée vers la gauche car le piston se déplace vers la droite ;
▷ à la force pressante $\vec{F}_\mathrm{p} = (P_1 - P_2)\pi {R_1}^2\vec{u} = -P_1\pi {R_1}^2\vec{u}$.

Comme le mouvement du piston est qualifié de quasi-statique, on peut considérer que ces forces se compensent, d'où

$$F - \frac{2\pi R_1\alpha P_1}{R_2 - R_1} - P_1\pi {R_1}^2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{F = \frac{2\pi R_1 \alpha P_1}{R_2 - R_1} + P_1 \pi {R_1}^2\,.}$$