TD 9 – Thermodynamique industrielle *Correction*

Bilans d'énergie des écoulements en conduite

Exercices

Exercice 1 : Écritures du théorème de Bernoulli

1 Vrai, homogène à une énergie massique.

2 Faux : gz est une énergie massique mais $\dfrac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique.

3 Faux : p/ρ et Δp dans la même équation.

4 Vrai, homogène à une puissance.

5 Vrai, homogène à une énergie massique.

6 Faux, z est une hauteur mais évidemment pas v^2.

7 Faux, membre de gauche homogène à une puissance et membre de droite à une énergie massique.

8 Vrai, homogène à une hauteur.

9 Faux : l'équation est homogène, mais la perte de charge traduit une dissipation et il manque donc le signe $-$.

10 Vrai, homogène à une puissance.

11 Vrai, homogène à une pression (ou une énergie volumique).

Exercice 2 : Débitmètre de Venturi

1 L'écoulement étant incompressible,

$$D_V = v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 > v_1\,.}$$

En négligeant les pertes de charge et en supposant le débitmètre horizontal, le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2}\,,$$

on a donc $p_2 < p_1$ et donc

$$\boxed{\Delta p > 0\,.}$$

2 En remplaçant les vitesses $v_{1,2}$ par $D_V/S_{1,2}$ on obtient en réécrivant le théorème de Bernoulli

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{D_V^2}{2{S_2}^2} - \frac{D_V^2}{2{S_1}^2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{D_V^2}{2}\left(\frac{1}{{S_2}^2} - \frac{1}{{S_1}^2}\right) = \frac{\Delta p}{\rho}$$

et finalement

$$\boxed{D_V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\dfrac{1}{{S_2}^2} - \dfrac{1}{{S_2}^2}\right)}}\,.}$$

Exercice 3 : Écoulement forcé

1 L'eau étant un liquide incompressible, il y a conservation du débit volumique dans toute l'installation. La citerne étant de diamètre très supérieur à la conduite, on peut négliger la vitesse débitante de l'eau dans la citerne devant celle dans la conduite,

$$\boxed{U = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

2 D'après le théorème de Bernoulli,

$$\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - \left(\frac{P_1}{\rho} + 0 + gh\right) = -g\,\Delta h$$

ce qui donne

$$P_1 = P_\mathrm{atm} + \rho\frac{U^2}{2} + \rho g(H + \Delta h - h)$$

Cette pression P_1 est maximale lorsque la hauteur d'eau h dans la citerne est nul. Le système d'air comprimé doit donc être en mesure d'imposer une pression

$$\boxed{P_1 > P_\mathrm{atm} + \rho\frac{U^2}{2} + \rho g(H + \Delta h) = 1{,}6\,\mathrm{bar}\,.}$$

3 En réécrivant la théorème de Bernoulli en termes de puissance et en prenant en compte la présence de la pompe,

$$D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + 0 + gh\right) = -D_\mathrm{m} g\,\Delta h + \mathcal{P}$$

soit avec le débit volumique $Q = D_\mathrm{m}/\rho$

$$\rho Q\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH\right) - \rho Q\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + 0 + gh\right) = -\rho\,Q\,g\,\Delta h + \mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\mathcal{P} = \rho Q\left[\frac{U^2}{2} + g(H + \Delta h - h)\right]\,.$$

Encore une fois, le cas le plus défavorable est celui où $h = 0$. Il faut donc que la pompe puisse fournir une puissance

$$\boxed{\mathcal{P} > \rho Q\left[\frac{U^2}{2} + g(H + \Delta h)\right] = 285\,\mathrm{W}\,.}$$

Exercice 4 : Vidange d'un réservoir

> *« Approximation de régime quasi-permanent » signifie que la hauteur d'eau dans le réservoir varie suffisamment lentement pour pouvoir appliquer toutes les relations du régime permanent (conservation du débit, Bernoulli, etc.)*

1 L'eau étant un fluide incompressible, on a par conservation du débit volumique

$$D_V = S\,v_A = s\,v_B \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_B = \frac{S}{s}v_A \gg v_A\,.}$$

2 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et la sortie de l'orifice (on pourrait tout aussi bien dire « sur la ligne de courant allant de A à B »), évidemment sans puissance indiquée et en négligeant les pertes de charge,

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gH = \frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + 0 + gH = \frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + 0$$

car la pression dans un jet libre est égale à la pression atmosphérique. On en déduit

$$v_B^2 = 2gH$$

et ainsi le débit volumique

$$\boxed{D_V = s\sqrt{2gH}\,.}$$

3 Le volume d'eau dV sortant du réservoir pendant dt vaut

$$\mathrm{d}V = D_V\,\mathrm{d}t = S\,[H(t) - H(t+\mathrm{d}t)] \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{s\sqrt{2gH} = -S\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\,.}$$

4 Une telle équation s'intègre par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_{H_0}^{0}\frac{\mathrm{d}H}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\int_0^T \mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$0 - 2\sqrt{H_0} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}(T-0)$$

et ainsi

$$\boxed{T = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}\,.}$$

5 Le modèle utilisé ne tient pas compte des pertes de charge, qui peuvent être importantes, et tout particulièrement la **perte de charge singulière au niveau de l'orifice**.

Exercice 5 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie

L'installation est schématisée figure 1.

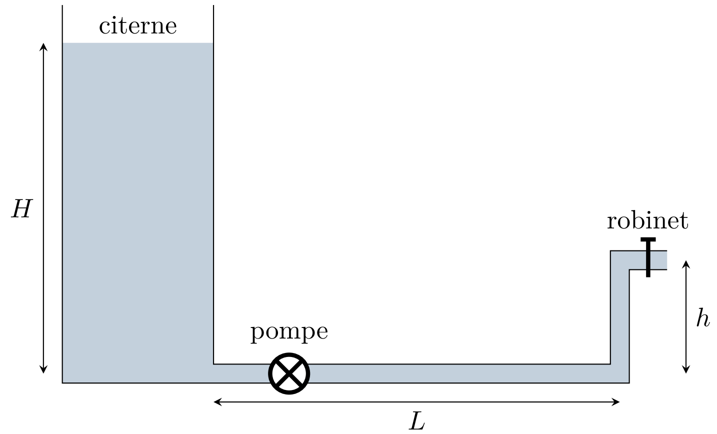

Figure 1 – Schéma de l'installation hydraulique.

1 Le remplissage de l'arrosoir exige un débit volumique $Q = 0{,}5\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 5\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}$. La vitesse débitante dans la conduite est donc

$$\boxed{V = \frac{Q}{\pi D^2/4} = 1{,}6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement dans la conduite est donc

$$\boxed{Re = \frac{\mu V D}{\eta} = 3{,}2\cdot10^4\,.}$$

2 La rugosité relative de la conduite est donnée par $\varepsilon = e/D = 1\cdot10^{-4}$. À partir des valeurs indiquées à droite du diagramme, on en déduit la courbe à suivre, indiquée par la flèche figure 2. On repère ensuite le point où cette courbe coupe la verticale $Re = 3\cdot10^4$. L'ordonnée de ce point donne la valeur du coefficient de friction,

$$\boxed{\lambda = 5\cdot10^{-3}\,.}$$

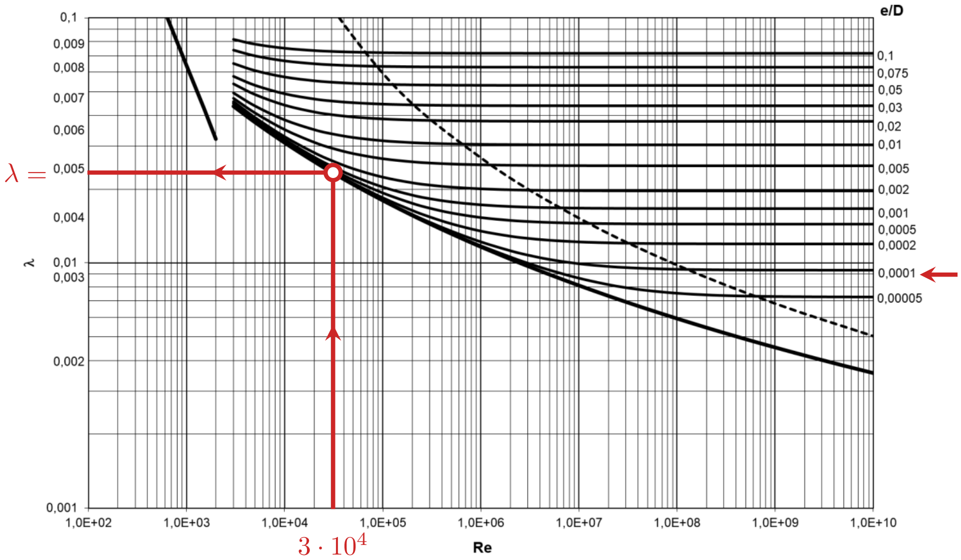

Figure 2 – Abaque de Moody complétée.

On en déduit la chute de pression,

$$\boxed{\Delta p = \lambda \frac{\mu L V^2}{2D} = 9{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}\,.}$$

3 Appliquons la relation de Bernoulli entre le haut de la citerne d'eau ($P = P_\mathrm{atm}$, $v \simeq 0$ en la supposant très large, $z = H$) et la sortie du robinet ($P = P_\mathrm{atm}$ car jet libre, $z = h$). On prend bien sûr en compte la puissance indiquée $\mathcal{P}_\mathrm{i}$ fournie par la pompe et la perte de charge.

$$D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\mu} + \frac{V^2}{2} + gh\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\mu} + 0 + gH\right) = \mathcal{P}_\mathrm{i} - D_\mathrm{m}\frac{\Delta p}{\mu}\,.$$

> *Les facteurs D_m et μ à faire apparaître devant la perte de charge Δp se retrouvent par comparaison avec les pressions apparaissant dans le membre de gauche (qu'il faut connaître !).*

Sachant que le débit volumique est donné par $Q = D_\mathrm{m}/\mu$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{i} = Q\,\Delta p + \mu\,Q\,\frac{V^2}{2} + g(h - H) = 17\,\mathrm{W}\,.}$$

4 La puissance indiquée est reliée à la puissance consommée par

$$\mathcal{P}_\mathrm{i} = 0{,}6\,\mathcal{P}_\mathrm{cons} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{P}_\mathrm{cons} = \frac{\mathcal{P}_\mathrm{i}}{0{,}6} = 28\,\mathrm{W}\,.}$$

5 Outre la perte de charge régulière, il aurait aussi fallu prendre en compte des **pertes de charges singulières** au niveau des coudes des canalisations et du robinet.

Annales de concours

Exercice 6 : Alimentation d'une maison depuis un château d'eau [écrit PT 2015]

Tout au long de l'exercice, on raisonne implicitement mais comme presque toujours sur des vitesses débitantes.

1 Notons v_0 la vitesse au niveau de la surface libre et v celle dans la canalisation. L'eau étant incompressible, il y a conservation du débit volumique, d'où on déduit

$$D_V \underbrace{=}_{\text{surf libre}} S_0 v_0 \underbrace{=}_{\text{canalisation}} sv \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{v_0}{v} = \frac{s}{S_0} \ll 1\,.}$$

2 Supposons de plus l'écoulement stationnaire et parfait. D'après le théorème de Bernoulli,

$$\left(\frac{P_\text{atm}}{\rho} + \frac{v^2}{2} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm}}{\rho} + 0 + gH\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2gH} = 20\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,,}$$

en considérant que la pression dans le jet libre est égale à la pression atmosphérique P_atm.

3 En interprétant la vitesse précédente comme la vitesse débitante,

$$\boxed{D_V = v\,s = 20\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 20\,\text{L}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

4 Une perte de charge régulière décrit une dissipation d'énergie mécanique du fluide par viscosité répartie tout au long d'un écoulement. Choisissons d'écrire cette constante K comme étant homogène à une hauteur. Le théorème de Bernoulli écrit entre le haut du chateau d'eau et la sortie de la canalisation devient

$$\left(\frac{P_\text{atm}}{g\rho} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm}}{\rho g} + 0 + H\right) = -K\,.$$

> *L'énoncé n'est pas clair ... Une perte de charge peut s'exprimer indifféremment comme une pression ou comme une hauteur : ici K est homogène à une hauteur, mais on peut également l'écrire $K' = K/\rho g$ où K' est une pression. Seule certitude, on n'exprime jamais la perte de charge comme une énergie massique : même si c'est tentant, on ne peut pas simplement écrire $-K$ dans le membre de droite du théorème de Bernoulli.*

5 Le fluide ne s'écoule pas dans les deux tubes piézométriques verticaux, on y applique donc la loi de la statique des fluides pour en déduire la pression dans la canalisation : $P = P_\text{atm} + \rho g h$. La conservation du débit volumique indique que la vitesse d'écoulement v est la même sous les deux prises de pression. On en déduit en appliquant la relation de Bernoulli entre le bas des deux tubes notés 1 et 2

$$\left(\frac{P_\text{atm} + \rho g h_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm} + \rho g h_1}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) = -K$$

d'où

$$K = h_1 - h_2 = \Delta h\,.$$

La perte de charge linéaire k s'en déduit par $k = K/\ell$ avec $\ell = 10\,\text{m}$ la distance séparant les deux tubes,

$$\boxed{k = \frac{\Delta h}{\ell} = 2\cdot 10^{-3}\,.}$$

> *La perte de charge par unité de longueur k est sans dimension en tant que rapport de deux longueurs.*

6 La perte de charge sur toute la longueur de canalisation vaut kL avec $L = 1{,}0\,\text{km}$. D'après la relation de Bernoulli appliquée entre la surface libre du château d'eau et le robinet,

$$\left(\frac{P_\text{atm}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + 0\right) - \left(\frac{P_\text{atm}}{\rho g} + 0 + H\right) = -kL \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{2g\,(H - kL)} = 18{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\,.}$$

> *Comme c'est la pression qui est imposée aux deux extrémités de la conduite (pression atmosphérique) mais que rien ne contraint le débit volumique, c'est lui qui est modifié par la perte de charge. On ne peut donc plus utiliser la valeur précédente pour calculer la vitesse.*

7 La perte de charge kL est l'énergie massique perdue par perte de charge, qu'il faut donc compenser par une pompe de puissance

$$\mathcal{P} = D_\mathrm{m} g k L \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P} = \rho D_V \, g \, kL = 400\,\mathrm{W}\,.}$$

> *Ayant identifié l'énergie massique, vous devez savoir qu'il faut multiplier par D_m pour obtenir une puissance, puis savoir (ou retrouver par analyse dimensionnelle) que $D_m = \rho D_V$ pour conclure. Attention à ne pas oublier la multiplication par g !*

Exercice 7 : Production d'énergie hydroélectrique [oral banque PT]

1 Le débit volumique représente le volume de fluide traversant une section donnée de la conduite chaque seconde, ou ici de façon équivalente le volume de fluide sortant de la conduite chaque seconde.

2 Le lac étant très grand par rapport à la conduite, on peut considérer qu'à la surface

$$v_1 \simeq 0\,.$$

La vitesse (débitante) en sortie de la conduite se déduit du débit volumique,

$$v_2 = \frac{Q_\mathrm{vol}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v_2 = \frac{4 Q_\mathrm{vol}}{\pi D^2} = 5{,}1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

3 L'écoulement est incompressible et permanent. Comme on cherche la puissance maximale disponible, on néglige les pertes de charge. La relation de Bernoulli appliquée entre la surface du lac et la sortie de la conduite donne

$$D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_1}^2}{2} + g z_1\right) - D_\mathrm{m}\left(\frac{P_\mathrm{atm}}{\rho} + \frac{{v_2}^2}{2} + g z_2\right) = -\mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance indiquée *cédée* par le fluide à la turbine. Comme $D_\mathrm{m} = \rho\, Q_\mathrm{vol}$, on en déduit

$$\boxed{\mathcal{P} = \rho\, Q_\mathrm{vol}\left[g(z_2 - z_1) - \frac{{v_2}^2}{2}\right] = 5{,}8\,\mathrm{MW}\,.}$$

> *On peut remarquer que cette puissance ne dépend pas de la position de la turbine au sein de la conduite : elle est la même que la turbine soit proche de la surface du lac ou au contraire proche de la sortie de la conduite.*

4 La valeur donnée est cohérente avec celle qu'on vient de déterminer ... ouf ! La différence vient des pertes de charge, non prises en compte dans la question précédente. Celles-ci sont de deux types : régulières le long de la conduite, et singulière à l'entrée. On peut par exemple exprimer la perte de charge sous forme d'une altitude Δz_c. Ici, la puissance perdue s'écrit

$$\mathcal{P}_\mathrm{diss} = \rho Q_\mathrm{vol}\, g\, \Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4\mathcal{P}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\Delta z_\mathrm{c} = 0{,}4 \frac{\mathcal{P}}{\rho\, g\, Q_\mathrm{vol}} = 9{,}5\,\mathrm{m}\,.}$$

Tout se passe donc comme si l'écoulement était parfait (pas de perte de charge) mais que l'écart $z_2 - z_1$ était réduit de 9,5 m, c'est-à-dire comme si le niveau du lac était plus bas de 9,5 m.

> *Pour savoir comment positionner les facteurs D_m, ρ, Q_vol, etc. on raisonne dimensionnellement à partir du théorème de Bernoulli ... qu'il faut donc connaître par cœur et sans erreur.*

Exercice 8 : Décollement du toit d'une cabane [oral banque PT]

On suppose que l'écoulement de l'air est parfait, incompressible et stationnaire.

1 La conservation du débit volumique donne

$$\boxed{V_1 S_1 = V_2 S_2\,.}$$

D'après la relation de Bernoulli, en néligeant les variations d'énergie potentielle,

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{{V_1}^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{{V_2}^2}{2}\,,$$

avec ρ la masse volumique de l'air.

2 Voir figure 3.

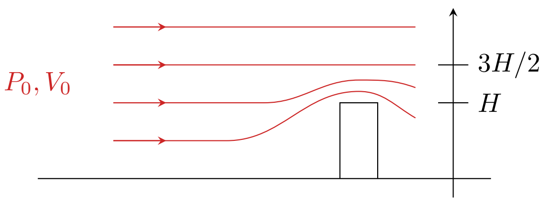

Figure 3 – Lignes de champ autour de l'obstacle.

3 Raisonnons sur une longueur L dans le plan orthogonal à celui de la figure. Un tube de champ a donc une section $S_0 = L \times 3H/2$ loin de l'obstacle, seulement $S_1 = L \times H/2$ au niveau de l'obstacle. On indice 1 les grandeurs au niveau de l'obstacle. La conservation du débit donne

$$V_0 \times \frac{3LH}{2} = V_1 \times \frac{LH}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V_1 = 3V_0\,.}$$

4 Utilisons la relation de Bernoulli pour calculer la pression au dessus de l'obstacle,

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{{V_0}^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{{V_1}^2}{2} = \frac{P_1}{\rho} + \frac{9{V_0}^2}{2}$$

d'où on déduit

$$P_1 = P_0 - 4\rho {V_0}^2\,.$$

L'air à l'intérieur de la cabane est au repos à la pression P_0. Le toit de surface S subit donc une force résultante $(P_0 - P_1)S$ verticale vers le haut car $P_1 < P_0$. Le vent peut soulever le toit de la cabane lorsque cette force de pression compense le poids, soit

$$4\rho S {V_0}^2 > Mg \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{Mg}{4\rho S}}\,.}$$

> *Dans le cadre de ce modèle, pour soulever un toit en tôle de 50 kg, il suffit que la vitesse du vent soit supérieure à ... 10 km · h^{-1} ! Ce résultat plus que douteux pose clairement des questions sur la validité du modèle utilisé ! En effet, ou bien le toit est juste posé mais alors le vent s'engouffre aussi sous le toit et la dépression est nettement plus faible, ou bien il est fixé et auquel cas il faut une dépression nettement plus importante pour compenser la force de fixation et le soulever.*