

Transformations infinitésimales en thermodynamique

Révisions de PTSI

Exercice 1 : Échauffement adiabatique d'un gaz par compression

[💡 1 | ✂ 0]

1 Le système considéré est le gaz dans la seringue. Comme la transformation est **rapide**, elle peut être considérée comme adiabatique.

2 Procédons à un bilan d'énergie au cours de la transformation. Le piston se déplace sur une longueur $L_I - L_F$, et comme la force est constante alors le travail (moteur) exercé par l'opérateur vaut simplement

$$W = F_0(L_I - L_F).$$

On suppose la force de pression extérieure négligeable devant F_0 .

Penser à vérifier le signe de W pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur de signe.

Il n'y a pas de force de pression intérieure à prendre en compte : comme son nom l'indique, c'est une force intérieure!

Le bilan d'énergie s'écrit

$$\Delta U \underset{\text{1er ppe}}{=} F_0(L_I - L_F) \underset{\text{Joule}}{=} C_V(T_F - T_I),$$

d'où on déduit finalement

$$T_F = T_I + \frac{F_0}{C_V}(L_I - L_F) > T_I.$$

La température du gaz augmente, alors qu'il n'a reçu aucun transfert thermique.

Exercice 2 : Capacité thermique massique du cuivre

[💡 1 | ✂ 0]

Le système considéré est constitué du calorimètre, de l'eau qu'il contient et du barreau de cuivre. La transformation dans le calorimètre peut être considérée comme adiabatique, et comme il n'y a pas de travail indiqué fourni au système, le premier principe donne

$$\Delta H = Q + W_i = 0.$$

Par additivité de l'enthalpie, la variation totale d'enthalpie est la somme de celles de l'eau, du calorimètre et du métal. Comme il s'agit de phases condensées changeant de température, on a

$$\Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{calo}} + \Delta H_{\text{Cu}} = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (T_F - T_{\text{eau}}) + \mu c_{\text{eau}} (T_F - T_{\text{eau}}) + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (T_F - T_{\text{Cu}})$$

en décrivant le calorimètre par sa valeur en eau μ . Finalement,

$$c_{\text{Cu}} = \frac{(m_{\text{eau}} + \mu) c_{\text{eau}} (T_{\text{eau}} - T_F)}{m_{\text{Cu}} (T_F - T_{\text{Cu}})} = 9,8 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Exercice 3 : De la glace qui fond

[💡 2 | ✂ 1 | ☹ 1]

L'exercice est nettement plus rédigé que nécessaire. En particulier, les schémas synoptiques des transformations auxiliaires sont pratiques pour comprendre le raisonnement mais pas nécessaires sur une copie. On peut directement donner l'expression de ΔH obtenue pour la transformation auxiliaire.

Comme le calorimètre est calorifugé et que les systèmes n'y reçoivent aucun travail, alors d'après le premier principe,

$$\Delta H = W_{\neq p} + Q = 0$$

Les transformations dans le calorimètre sont donc isenthalpiques. Dans tout l'exercice, le système considéré est l'ensemble de l'eau contenue dans le calorimètre. Il s'agit bien d'un système fermé (masse constante), mais il n'est pas homogène (deux phases).

1 Raisonnons à partir de la transformation fictive décrite figure 1. Elle a même état initial et même état final que la transformation réelle, donc comme l'enthalpie est une fonction d'état, sa variation est la même au cours des deux transformations.

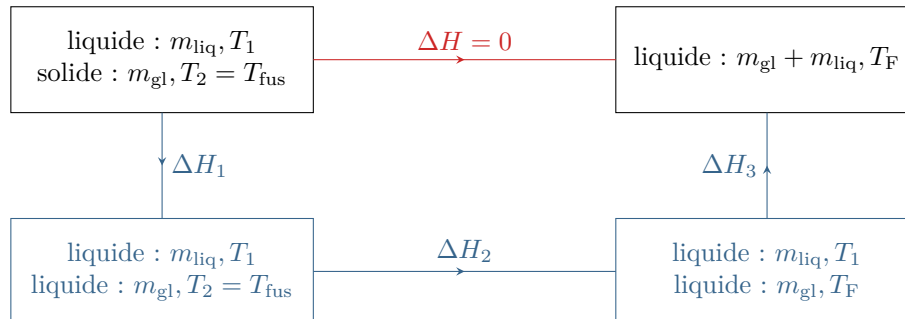


Figure 1 – Schéma synoptique de la transformation. Hypothèse où l'état final est complètement liquide.

Calculons les variations d'enthalpie étape par étape :

▷ Étape 1 : la totalité de la glace fond tout en restant à la température de fusion $T_1 = 0^\circ\text{C}$, le reste du système ne subit aucune transformation, donc

$$\Delta H_1 = m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h;$$

▷ Étape 2 : la masse d'eau juste fondue, liquide, passe de T_2 à T_F , le reste du système ne subit aucune transformation, donc

$$\Delta H_2 = m_{\text{gl}} c (T_F - T_2);$$

▷ Étape 3 : l'eau initialement liquide passe de T_1 à T_F , le reste du système ne subit aucune transformation, donc

$$\Delta H_3 = m_{\text{liq}} c (T_F - T_1).$$

Ainsi, le bilan enthalpique global s'écrit

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$

et donc

$$0 = m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h + m_{\text{gl}} c (T_F - T_2) + m_{\text{liq}} c (T_F - T_1).$$

On en déduit alors

$$T_F = \frac{m_{\text{gl}} c T_2 + m_{\text{liq}} c T_1 - m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h}{(m_{\text{gl}} + m_{\text{liq}}) c} = 260 \text{ K} = -13^\circ\text{C}.$$

Il y a donc une contradiction : l'eau est supposée liquide, et pourtant à la température trouvée elle devrait être solide. **L'hypothèse d'eau complètement liquide est donc fautive.**

2 Si l'eau est présente à la fois sous forme liquide et solide, alors comme la transformation est monobare à pression atmosphérique, on connaît la température finale qui est l'unique température à laquelle une coexistence stable est possible,

$$T_F = T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}.$$

La transformation auxiliaire sur laquelle on raisonne pour exprimer les variations d'enthalpie se compose de deux étapes, indiquées figure 2.

▷ Étape 1 : la totalité de l'eau liquide refroidit jusqu'à la température T_{fus} , le reste du système ne subit aucune transformation, donc

$$\Delta H_1 = m_{\text{liq}} c (T_{\text{fus}} - T_1);$$

▷ Étape 2 : une fraction x d'eau solide (masse $x m_{\text{gl}}$) passe à l'état liquide, le reste du système ne subit aucune transformation, donc

$$\Delta H_2 = x m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h$$

Le bilan enthalpique global s'écrit donc

$$\Delta H = 0 = m_{\text{liq}} c (T_{\text{fus}} - T_1) + x m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h$$

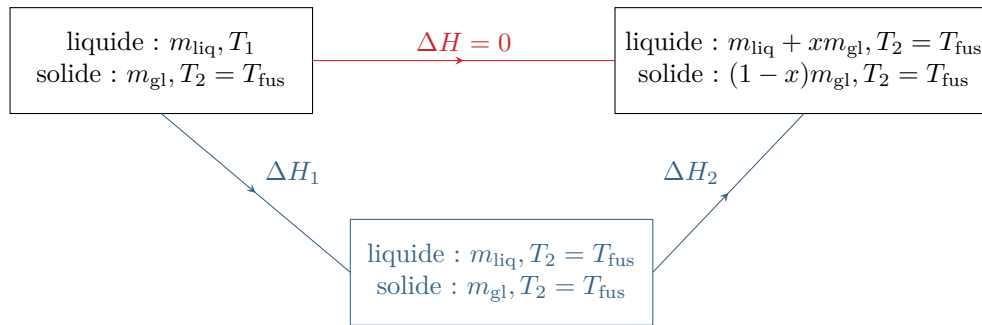


Figure 2 – Schéma synoptique de la transformation. Hypothèse où l'état final est une coexistence entre solide et liquide.

soit

$$x = \frac{m_{\text{liq}} c (T_1 - T_{\text{fus}})}{m_{\text{gl}} \Delta_{\text{fus}} h} = 0,51.$$

Cette valeur est physiquement acceptable : on en déduit que l'hypothèse est validée. Ainsi, dans l'état final, le calorimètre contient 1,25 kg d'eau liquide et 0,25 kg de glace, le tout à 0 °C.

Une hypothèse fautive se traduirait par une valeur de x négative ou supérieure à 1.

Attention à la cohérence physique des hypothèses lors de la construction de la transformation auxiliaire : si l'eau liquide refroidit, alors pour conserver l'enthalpie il faut nécessairement que de la glace fonde. Dans le cas où vous auriez supposé que l'eau refroidissait puis gelait, vous auriez abouti à une contradiction.

Exercice 4 : Équilibre d'une enceinte à deux compartiments

[💡 2 | 🔗 2]

1 Considérons le système formé des deux gaz dans les deux compartiments et de la cloison. Comme la cloison est diatherme et mobile sans frottement, alors les deux gaz seront en équilibre thermique et mécanique à l'état final, d'où on déduit directement

$$T_{1F} = T_{2F} \stackrel{\text{déf.}}{=} T_F \quad \text{et} \quad P_{1F} = P_{2F} \stackrel{\text{déf.}}{=} P_F.$$

En revanche, les volumes V_1 et V_2 des compartiments sont a priori différents. Enfin, la loi des gaz parfaits et les conditions initiales montrent que la quantité de matière diffère dans les deux compartiments : $n_2 = 2n_1$. Comme le piston est étanche, elle ne change pas au cours de la transformation. Pour unifier les notations, on notera $n_1 = n_0$. En résumé, les états des gaz sont :

- ▷ Gaz 1 : état initial (n_0, T_0, P_0, V_0) , état final (n_0, T_F, P_F, V_1) ;
- ▷ Gaz 2 : état initial $(2n_0, T_0, 2P_0, V_0)$, état final $(2n_0, T_F, P_F, V_2)$.

Par additivité de l'énergie interne,

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_{\text{cloison}} \simeq \Delta U_1 + \Delta U_2$$

en supposant que la cloison, solide, est de masse suffisamment faible pour que son énergie interne ne varie presque pas.

Il est cependant indispensable de l'inclure dans le système, sans quoi il faut également prendre en compte le travail fourni par la cloison aux gaz pendant le déplacement, ce qui complique singulièrement les choses.

D'après le premier principe,

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = W + Q = 0$$

car l'enceinte est indéformable et calorifugée.

Attention à ne pas confondre : il y a échange de travail et de transfert thermique d'un gaz à l'autre (sans quoi il n'y aurait pas de transformation), mais compte tenu du système considéré ce sont des échanges intérieurs, qui n'apparaissent pas dans le bilan d'énergie.

Quelle que soit la transformation, les variations d'énergie interne d'un gaz parfait sont reliées aux variations de température par la capacité thermique à volume constant (et ce, même si l'évolution n'est pas isochore ... c'est propre au gaz parfait !). Ainsi,

$$\Delta U_{1,2} = C_{V1,2}(T_F - T_0) \quad \text{d'où} \quad (C_{V1} + C_{V2})(T_F - T_0) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{T_F = T_0}$$

Pour calculer les pressions et les volumes, on utilise l'équation d'état,

$$P_F V_1 = n_0 R T \quad \text{et} \quad P_F V_2 = 2n_0 R T \quad \text{d'où} \quad V_2 = 2V_1.$$

Comme l'enceinte est indéformable, alors on a également $V_1 + V_2 = 2V_0$, ce qui permet de conclure

$$V_1 = \frac{2}{3}V_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{4}{3}V_0.$$

Enfin, l'équation d'état permet d'aboutir à la pression, dont on rappelle qu'elle est égale dans les deux compartiments,

$$P_F = \frac{3n_0 R T_0}{2V_0}.$$

L'idée pour la fin de question, une fois les températures trouvées, est de déterminer les trois variables d'état manquantes V_1, V_2 et P_F en utilisant trois équations indépendantes : l'équation d'état des gaz parfaits appliquée aux deux compartiments donne deux équations, la conservation du volume donne la troisième. La tambouille des calculs peut ensuite être faite de multiples façons.

2 La variation d'entropie du système s'obtient facilement par extensivité et utilisation de la fonction d'état donnée (en multipliant par les quantités de matière à température constante, ce qui permet de simplifier directement)

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= n_0 R \ln \frac{V_1}{V_0} + 2n_0 R \ln \left(\frac{V_2}{V_0} \right) \\ &= n_0 R \left[\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{16}{9} \right] \\ \Delta S &= n_0 R \ln \frac{32}{27} \end{aligned}$$

Comme la transformation est adiabatique, le système n'échange pas d'entropie avec l'extérieur, donc $\Delta S = S_{\text{créé}}$ d'où

$$S_{\text{créé}} = n_0 R \ln \frac{32}{27}$$

dont on remarque qu'elle est bien strictement positive, comme imposé par le second principe.

Il y a également de l'entropie échangée entre les deux gaz, mais là encore ce sont des échanges internes qui n'apparaissent donc pas dans le bilan entropique global.

Exercices

Exercice 5 : Démonstration de la loi de Laplace

[💡 1 | ✂️ 2 | Ⓜ️]

1.a Trois hypothèses : gaz parfait en transformation adiabatique et réversible. La loi de Laplace s'écrit

$$PV^\gamma = \text{cte}.$$

1.b On combine avec l'équation d'état : d'une part,

$$\frac{nRT}{V} \times V^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte}',$$

et d'autre part

$$P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}''.$$

2 La variation d'énergie interne au cours de la transformation s'écrit

$$dU \underbrace{=}_{\text{Joule}} C_V dT \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} \delta W_p + 0$$

et en remplaçant

$$\frac{nR}{\gamma - 1} dT = -P dV.$$

3 En prenant la différentielle de l'équation d'état,

$$V dP + P dV = nR dT.$$

On déduit alors de la question précédente

$$V dP + P dV = -(\gamma - 1)P dV \quad \text{d'où} \quad V dP = -\gamma P dV.$$

4 La séparation des variables donne

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

et par intégration

$$\ln P = -\gamma \ln V + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln P + \gamma \ln V = \text{cte} \quad \text{et} \quad \ln(PV^\gamma) = \text{cte}$$

d'où on déduit la loi de Laplace,

$$PV^\gamma = \text{cte}.$$

Exercice 6 : Transformation polytropique

[💡 2 | ✂ 3]

Commençons par écrire l'équation d'état en fonction de r et v ,

$$P \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{soit} \quad Pv = \frac{RT}{M} \quad \text{d'où} \quad Pv = rT.$$

1 D'après l'identité thermodynamique,

$$T ds = du + P dv = c dT.$$

Or pour un gaz parfait

$$du = c_V dT \quad \text{et} \quad P = \frac{rT}{v}$$

d'où on déduit

$$c_V dT + \frac{rT}{v} dv = c dT$$

et ainsi

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} - r \frac{dv}{v} = 0.$$

2 La relation précédente s'écrit

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = r \frac{dv}{v},$$

donc en intégrant

$$(c - c_V) \ln T = r \ln v + \text{cte}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\ln T - \frac{r}{c - c_V} \ln v = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln \left(T \times v^{-r/(c - c_V)} \right) = \text{cte} \quad \text{donc} \quad \ln \left(\frac{Pv}{r} \times v^{-r/(c - c_V)} \right) = \text{cte}.$$

On en déduit donc que

$$Pv^{1 - r/(c - c_V)} = \text{cte}$$

ce qui est bien de la forme demandée avec

$$k = 1 - \frac{r}{c - c_V} = \frac{c - c_V - r}{c - c_V} \quad \text{d'où} \quad k = \frac{c - c_P}{c - c_V}.$$

en utilisant la relation de Mayer sous forme massique.

3 La relation de la question 1 s'écrit

$$\frac{dT}{T} - \frac{r}{c - c_V} \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{T} + (k - 1) \frac{dv}{v} = 0.$$

Au cours de la transformation, le travail massique reçu dû aux forces de pression s'écrit

$$\delta w = -P dv = -rT \frac{dv}{v} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\delta w = \frac{r}{k - 1} dT.}$$

4 On a

$$du \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} \delta w + \delta q \underbrace{=}_{\text{Joule}} c_V dT = \frac{r}{\gamma - 1} dT$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta q = r \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1} \right) dT.}$$

5 • **Isobare** : il faut $P = \text{cte}$, ce qui est possible si $k = 0$.

• **Isochore** : il faut $v = \text{cte}$, et d'après la relation polytropique

$$P^{1/k} v = \text{cte}.$$

On veut donc $1/k = 0$ ce qui est possible si $k \rightarrow \infty$.

• **Adiabatique** : il faut $\delta q = 0$, ce qui est possible si $k = \gamma$. La relation polytropique redonne alors comme prévu la loi de Laplace (adiabatique réversible d'un gaz parfait).

• **Isotherme** : d'après l'équation d'état, une isotherme se caractérise par $Pv = rT = \text{cte}$, ce qui est possible pour $k = 1$.

Exercice 7 : Chauffage isobare d'un gaz parfait

[💡 1 | ✂ 1]

1 Appliquons le premier principe au gaz entre les instants t et $t + dt$. La transformation est isobare avec $p = p_0$ (p pression du gaz) grâce au piston libre de coulisser. D'après le premier principe,

$$dH = \delta W_i + \delta Q = 0 + RI^2 dt.$$

et comme on a affaire à un gaz parfait

$$dH = C_P dT.$$

Par identification, on déduit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RI^2}{C_P}$$

et en utilisant l'expression de $R(T)$ on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R_0 I^2}{C_P T_0} T = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_P T_0}{R_0 I^2}.$$

Cette équation s'intègre en

$$T(t) = A e^{+t/\tau},$$

et à l'instant initial

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} T_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{T(t) = T_0 e^{+t/\tau}.$$

Si on écrit l'équation différentielle sous forme canonique, on constate que les deux préfacteurs sont de signe différents : le système est instable (cf. chapitre sur les systèmes linéaires), il est donc logique de trouver une solution divergente.

2 On en déduit

$$V(t) = \frac{nRT(t)}{p_0} = \frac{nRT_0}{p_0} e^{+t/\tau} \quad \text{soit} \quad \boxed{V(t) = V_0 e^{+t/\tau} .}$$

Annales de concours

Exercice 8 : Bilan d'entropie

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ☹]

Le litre d'eau à température ambiante a pour masse $m = 1$ kg.

1 On raisonne sur une transformation où l'eau atteint sa température d'ébullition et se vaporise. Ainsi,

$$\boxed{\Delta S_{\text{eau}} = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + m \Delta_{\text{vap}} s = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + m \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}} = 7,07 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .}$$

Comme le thermostat évolue de façon réversible, sa variation d'entropie est égale à l'entropie échangée entre les deux systèmes. Commençons par calculer le transfert thermique Q reçu par l'eau au cours de la transformation. Un bilan d'enthalpie donne

$$\Delta H_{\text{eau}} \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 + Q \underbrace{=}_{\text{transf}} mc(T_{\text{éb}} - T_0) + m \Delta_{\text{vap}} h .$$

L'entropie cédée par le thermostat et reçue par l'eau vaut donc

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_{\text{éb}}} = \frac{mc(T_{\text{éb}} - T_0) + m \Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}}$$

d'où on déduit la variation d'entropie du thermostat, égale à $-S_{\text{éch}}$ car il évolue de manière réversible,

$$\boxed{\Delta S_{\text{thst}} = mc \left(\frac{T_0}{T_{\text{éb}}} - 1 \right) - m \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}} = -6,96 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .}$$

Il est logique de trouver $\Delta S_{\text{thst}} < 0$ car le thermostat est de température supérieure à l'eau, donc lui cède un transfert thermique, donc de l'entropie, sans qu'il ne s'en crée dans le thermostat qui est réversible.

Enfin, l'entropie créée l'est uniquement dans l'eau et vaut

$$S_{\text{créée}} = \Delta S_{\text{eau}} - S_{\text{éch}} \quad \text{soit} \quad S_{\text{créée}} = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + \frac{mc(T_{\text{éb}} - T_0)}{T_{\text{éb}}}$$

soit en factorisant

$$\boxed{S_{\text{créée}} = mc \left[-\ln \frac{T_0}{T_{\text{éb}}} - \frac{T_0}{T_{\text{éb}}} + 1 \right] = 0,113 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .}$$

En utilisant l'inégalité de convexité $\ln x \leq 1 - x$, on peut vérifier que $S_{\text{créée}} > 0$ quelles que soient les températures car $c > 0$ (ou on montre ainsi que c doit être positif).

On peut aussi remarquer que le changement d'état n'intervient pas dans la création d'entropie : ce n'est pas un hasard, un changement d'état isotherme est une transformation réversible.

2 Notons T_1 la température du thermostat intermédiaire. La méthode est alors identique.

• **Variation d'entropie de l'eau :** L'état initial et final de l'eau étant le même qu'à la question précédente, la variation d'entropie est la même,

$$\boxed{\Delta S_{\text{eau}} = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + m \Delta_{\text{vap}} s = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + m \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}} = 7,07 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .}$$

• **Variation d'entropie de chaque thermostat :**

Bilan d'enthalpie au cours du contact avec le premier thermostat (Q_1 reçu par l'eau) :

$$\Delta H_1 \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 + Q_1 \underbrace{=}_{\text{Joule}} mc(T_1 - T_0)$$

d'où on déduit l'entropie échangée reçue par l'eau,

$$S_{\text{éch},1} = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{mc(T_1 - T_0)}{T_1} = mc \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right),$$

puis la variation d'entropie du thermostat 1 :

$$\Delta S_1 = -S_{\text{éch},1} = mc \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) = -0,502 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Bilan d'enthalpie au cours du contact avec le second thermostat :

$$\Delta H_2 \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} 0 + Q_2 \underbrace{=}_{\text{transf}} mc(T_{\text{éb}} - T_1) + m \Delta_{\text{vap}} h.$$

L'entropie cédée par le thermostat et reçue par l'eau vaut donc

$$S_{\text{éch},2} = \frac{Q_2}{T_{\text{éb}}} = \frac{mc(T_{\text{éb}} - T_1) + m \Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}}$$

d'où on déduit la variation d'entropie du thermostat 2,

$$\Delta S_2 = mc \left(\frac{T_1}{T_{\text{éb}}} - 1 \right) - m \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_{\text{éb}}} = -6,51 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

• **Entropie créée** : Il n'y a création d'entropie que dans l'eau, d'où

$$S_{\text{créée}} = \Delta S_{\text{eau}} - S_{\text{éch},1} - S_{\text{éch},2} \quad \text{soit} \quad S_{\text{créée}} = mc \ln \frac{T_{\text{éb}}}{T_0} + mc \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right) + mc \left(\frac{T_1}{T_{\text{éb}}} - 1 \right) = 0,059 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On constate que l'entropie créée est très inférieure dans la deuxième transformation : l'utilisation du thermostat intermédiaire permet de limiter les inhomogénéités de température dans l'eau, qui sont source d'irréversibilité.

Exercice 9 : Canon à neige

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓢ]

1 La goutte d'eau est un système fermé, en transformation monobare avec équilibre mécanique, qui n'échange d'énergie que par transfert thermique.

Bilan d'enthalpie entre t et $t + dt$:

$$dH \underbrace{=}_{\text{Joule}} m_0 c dT \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} -\phi dt = -h(T - T_a) S dt.$$

| Il y a un signe car ϕ est une puissance cédée.

La goutte étant sphérique de rayon R constant, on en déduit

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \mu c dT = -h(T - T_a) \times 4\pi R^2 dt$$

et finalement

$$\mu c R \frac{dT}{dt} = -3h(T - T_a).$$

2 Cette relation se réécrit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{3h}{\mu c R} T = \frac{3h}{\mu c R} T_a,$$

où on identifie le temps caractéristique

$$\tau = \frac{\mu c R}{3h}.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T = T_a + A e^{-t/\tau}.$$

As-tu bien pensé à la solution particulière $T = T_a$? Pour la retrouver : le second membre est constant, donc la solution particulière T_{part} aussi, et on la trouve directement sur l'équation différentielle :

$$0 + \frac{T_{part}}{\tau} = \frac{T_a}{\tau}.$$

La condition initiale donne

$$T(0) \underbrace{=}_{CI} T_0 \underbrace{=}_{sol} T_a + A \quad \text{donc} \quad A = T_0 - T_a.$$

Finalement,

$$T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}$$

ce qui se met bien sous la forme cherchée,

$$\boxed{\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-t/\tau} .}$$

À l'instant t_1 ,

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{donc} \quad t_1 = -\tau \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_1 = \tau \ln \frac{T_0 - T_a}{T_1 - T_a} = 4,0 \text{ s} .}$$

3 La transformation est cette fois supposée instantanée et implique des changements macroscopiques. Elle est supposée sans travail, adiabatique et monobare donc d'après le premier principe

$$\Delta H = 0.$$

L'eau est partiellement solidifiée, on en déduit donc que la température finale est égale à la température de co-existence $T_{fus} = 0^\circ\text{C}$. Il y a donc simultanément solidification et échauffement de l'eau. On raisonne donc sur la transformation auxiliaire, fictive, suivante, dans laquelle les deux phénomènes ont lieu successivement :

▷ dans une première étape, toute l'eau passe de T_1 à T_{fus} ;

▷ dans une deuxième étape, une masse $(1 - x)m$ se solidifie, ce qui laisse bien une fraction massique x de liquide.

Le bilan enthalpique s'écrit

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = mc(T_{fus} - T_1) + (1 - x)m(-\ell_{fus}).$$

| L'enthalpie de fusion est l'opposée de l'enthalpie de solidification.

Par identification des deux expressions de ΔH , on en déduit

$$(x - 1)\ell_{fus} = -c(T_{fus} - T_1)$$

et ainsi

$$\boxed{x = 1 - \frac{c(T_{fus} - T_1)}{\ell_{fus}} = 0,94 .}$$

4 Procédons au bilan enthalpique d'une transformation infinitésimale de durée dt au cours de laquelle une masse dm solidifie à température $T = T_{fus}$ constante. Le bilan enthalpique devient

$$dH \underbrace{=}_{\text{solidification}} -dm \ell_{fus} \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} -h(T_{fus} - T_a) 4\pi R^2 dt .$$

ce que l'on peut réécrire

$$dm = \frac{h(T_{fus} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{fus}} dt$$

avant d'intégrer

$$\int_{(1-x)m}^m dm = \frac{h(T_{fus} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{fus}} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

soit

$$m - (1 - x)m = \frac{h(T_{fus} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{fus}} (t_2 - t_1)$$

et on en déduit

$$\boxed{t_2 = t_1 + \frac{x R \ell_{fus} \mu}{3h(T_{fus} - T_a)} = 21 \text{ s} .}$$

On peut bien sûr intégrer « comme d'habitude », avec une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions initiales ... mais attention, les conditions initiales de cette deuxième phase ne sont pas en $t = 0$ mais en $t = t_1$. Dans un tel cas, raisonner par séparation des variables est moins risqué sur la prise en compte des conditions initiales.

Exercice 10 : Transformation polytropique

[oral banque PT | 💡 3 | ✂ 3]

La première question est excessivement calculatoire à mon sens, et mériterait d'être bien plus guidée. Si vous tombez sur un exercice comme celui-ci ... reste à espérer que le deuxième soit plus abordable!

1 D'après l'identité thermodynamique,

$$dU = T dS - P dV.$$

D'après les lois de Joule (gaz parfait),

$$dU = C_V dT \quad \text{et} \quad dH = C_P dT.$$

Comme la transformation est réversible, on a de plus

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + 0 = a C_P \frac{dT}{T},$$

et ainsi,

$$C_V dT = a C_P dT - P dV.$$

En divisant par T et en utilisant l'équation d'état, on obtient

$$(C_V - a C_P) \frac{dT}{T} = -\frac{P}{T} dV = -nR \frac{dV}{V} \quad \text{soit} \quad (C_V - a C_P) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0.$$

On peut alors séparer les deux membres et intégrer,

$$\ln T^{C_V - a C_P} = -\ln V^{nR} + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln (T^{C_V - a C_P} \times V^{nR}) = \text{cte}$$

d'où on déduit

$$T^{C_V - a C_P} V^{nR} = \text{cte}.$$

Or d'après l'équation d'état,

$$T = \frac{PV}{nR},$$

d'où, en insérant nR dans la constante,

$$P^{C_V - a C_P} V^{C_V - a C_P + nR} = \text{cte}$$

et en reconnaissant la relation de Mayer $C_P = C_V + nR$ il vient

$$P^{C_V - a C_P} V^{(1-a)C_P} = \text{cte}.$$

En changeant à nouveau la constante, on arrive enfin à

$$PV^{\frac{(1-a)C_P}{C_V - a C_P}} = PV^{\frac{(1-a)\gamma}{1-a\gamma}} = \text{cte},$$

ce qui est bien de la forme demandée,

$$PV^k = \text{cte} \quad \text{avec} \quad k = \frac{(1-a)\gamma}{1-a\gamma}.$$

2 Pour une transformation isobare, $P = \text{cte}$ donc

$$k_{\text{isoP}} = 0.$$

Une transformation isentropique réversible d'un gaz parfait est caractérisée par la loi de Laplace : on a alors

$$k_{\text{isoS}} = \gamma.$$

Enfin, une transformation isotherme se caractérise par

$$PV = nRT = \text{cte} \quad \text{soit} \quad k_{\text{isoT}} = 1.$$

Problème ouvert

Exercice 11 : Combien de glaçons dans le jus de fruits ?

[💡 3 | ✂ 1]

Solution à rédiger.

Idée : transformation classique isobare avec fonte totale des glaçons et refroidissement du liquide. Les calculs ne posent pas de difficulté, par contre il faut expliciter les hypothèses (en particulier discuter les transferts thermiques avec l'air environnant qu'on néglige abusivement) et estimer numériquement la masse d'un glaçon et la masse de jus de fruit qu'on met dans un verre.