



Conduction thermique

Exercices

Exercice 1 : Température dans une barre solide

[💡 1 | ✂ 1 | ⊗]

1 Cf. cours,

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\kappa}{\rho c}.$$

2 La durée τ du régime transitoire dépend de la diffusivité D et de la longueur L de la barre. Par analyse dimensionnelle (cf. cours là encore),

$$\tau \sim \frac{L^2}{D}$$

Les températures T_1 et T_2 n'interviennent pas, seuls les paramètres caractéristiques de la barre (et pas de son environnement) interviennent.

3 En régime permanent, l'équation devient

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dx} = a \quad \text{et} \quad T = ax + b$$

en intégrant deux fois. En tenant compte des conditions aux limites (cf. cours toujours),

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1.$$

4 Le flux thermique orienté selon \vec{u}_x vaut

$$\phi(x) = \iint \vec{j}(x) \cdot dS \vec{u}_x = j_{\text{th}}(x) S = -\kappa S \frac{dT}{dx} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\phi(x) = \frac{\kappa S}{L} (T_1 - T_2)},$$

qui ne dépend pas de x . Par définition de la résistance thermique, $T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \phi$ donc par identification

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{L}{\kappa S}}$$

5 Appliquons le second principe à la barre toute entière entre t et $t + dt$,

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

L'entropie échangée est fournie par les thermostats,

$$\delta S_e = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{+\phi dt}{T_1} + \frac{-\phi dt}{T_2}$$

En régime permanent, l'entropie de la barre est constante d'où

$$dS = 0 = \delta S_c + \phi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

et d'après la question précédente

$$\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{1}{R_{\text{th}}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}}$$

Le taux de production d'entropie est toujours strictement positif si $T_1 \neq T_2$, ce qui confirme que la diffusion thermique est un **phénomène irréversible**. Comme l'entropie créée est forcément positive, ce résultat permet également de conclure que la résistance thermique R_{th} est nécessairement positive.

Exercice 2 : Ailette de refroidissement

[2 | 2 | 2]

Compte tenu des hypothèses, la température ne dépend que de la variable x , $T = T(x)$, et donc $\vec{j} = j_x(x) \vec{e}_x$.

1 Raisonnons sur la tranche mésoscopique d'ailette située entre x et $x + dx$. Procédons à un bilan thermique entre t et $t + dt$:

- ▷ par la face située en x , elle reçoit $\delta Q_e = j_x(x) \times ab \, dt$;
- ▷ par la face située en $x + dx$, elle cède $\delta Q_s = j_x(x + dx) \times ab \, dt$;
- ▷ par les parois latérales, elle cède $\delta Q_{lat} = h(T(x) - T_0) \times (2a + 2b) dx \, dt$.

D'après le premier principe en régime stationnaire,

$$dH \underbrace{=}_{1er \, P} \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_{lat} \underbrace{=}_{stat} 0 \quad \text{d'où} \quad j_x(x) ab - j_x(x + dx) ab - 2h(T(x) - T_0)(a + b) dx = 0$$

et par un développement limité et en simplifiant par dx ,

$$0 = -\frac{dj_x}{dx} ab - h(T(x) - T_0)(2a + 2b).$$

D'après la loi de Fourier :

$$\lambda ab \frac{d^2 T}{dx^2} - 2h(a + b)T(x) = -2h(a + b)T_0$$

ce qui conduit au résultat

$$\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0 \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}.}$$

La grandeur δ s'interprète comme la longueur caractéristique de variation de la température dans l'ailette. Supposer l'ailette « infinie » signifie concrètement $L \gg \delta$.

2 Les racines du polynôme caractéristique sont $r_{\pm} = \pm 1/\delta$. On en déduit

$$T(x) = T_0 + A e^{-x/\delta} + B e^{x/\delta} \quad \text{avec} \quad A, B = \text{cte.}$$

Connaître la solution homogène d'une telle équation peut être utile en vue de l'oral (moins pour l'écrit), mais elle peut bien sûr se retrouver par résolution du polynôme caractéristique. Attention à ne pas confondre avec un oscillateur harmonique, qui a presque la même équation différentielle ... au signe près.

La solution particulière se trouve directement sur l'équation différentielle, et elle a la même forme que le second membre, soit ici une constante :

$$0 - \frac{1}{\delta^2} T_p = -\frac{1}{\delta^2} T_0$$

d'où le résultat annoncé $T_p = T_0$.

La température ne pouvant diverger lorsque $x \rightarrow \infty$, on a nécessairement $B = 0$. L'ailette et le composant étant en contact thermique parfait en $x = 0$,

$$T(x=0) \underbrace{=}_{CL} T_c \underbrace{=}_{sol} T_0 + A \quad \text{d'où} \quad A = T_c - T_0.$$

Finalement,

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0) e^{-x/\delta}.$$

3 Par définition, la puissance totale dissipée par l'ailette vaut

$$\mathcal{P} = \int_0^{+\infty} d\varphi(x) = \int_0^{+\infty} h(T_c - T_0) e^{-x/\delta} 2(a + b) dx.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} = 2h(a + b) \int_0^{\infty} e^{-x/\delta} dx = 2h(a + b) \left[-\delta e^{-x/\delta} \right]_0^{\infty} = 2h(a + b) \sqrt{\frac{\lambda ab}{2h(a + b)}}$$

et finalement

$$\boxed{\mathcal{P} = \sqrt{2h(a + b)ab\lambda}.}$$

4 Les deux dispositions proposées par l'énoncé occupent environ la même surface de composant (en négligeant la surface vide entre les ailettes). Pour N^2 ailettes,

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = N^2 \mathcal{P} = N^2 \sqrt{2h(a+b)ab\lambda}.$$

Pour une seule grande ailette,

$$\mathcal{P}'_{\text{tot}} = \sqrt{2h(Na + Nb)Na Nb\lambda} = N\sqrt{N\mathcal{P}}.$$

Ainsi,

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{tot}}}{\mathcal{P}'_{\text{tot}}} = \sqrt{N}.$$

La puissance dissipée par l'association de plusieurs ailettes est supérieure à celle dissipée par une unique ailette de grande section, car la surface de contact entre l'air et les ailettes est globalement plus importante.

Exercice 3 : Chauffage d'un studio

[💡 2 | ✂ 2]

Le fichier Python des applications numériques est en ligne sur le site de la classe.

1 Le béton et la laine de verre sont montés en série, donc pour une surface S ,

$$R = R_b + R_i = \frac{e_b}{\lambda_{\text{béton}}S} + \frac{e_i}{\lambda_{\text{laine}}S} \quad \text{d'où} \quad U = \frac{1}{RS} = \frac{1}{\frac{e_b}{\lambda_{\text{béton}}} + \frac{e_i}{\lambda_{\text{laine}}}} = 0,55 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2 La porte et le mur-couloir sont en parallèle, les conductances s'ajoutent et on a :

$$R_{\text{mp}} = \left(\frac{\lambda_{\text{bois}}hl}{e} + U \times (HL - hl) \right)^{-1} = 1,4 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

3 Les deux fenêtres sont équivalentes à une seule de longueur $l_f = 2 \text{ m}$. Les diverses épaisseurs de double vitrage sont en série, et le PVC est en parallèle. La résistance équivalente du double-vitrage est

$$R_{\text{dv}} = 2 \frac{e_v}{\lambda_{\text{verre}} h_f l_f} + \frac{e_a}{\lambda_{\text{air}} h_f l_f} = 2,0 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La surface apparente de l'encadrement de PVC est

$$S_{\text{PVC}} = (l_f + 4e_{\text{PVC}})(h_f + 2e_{\text{PVC}}) - h_f l_f = 3,2 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2.$$

L'association parallèle des matériaux donne

$$R_{\text{fen}} = \left(\frac{1}{R_{\text{dv}}} + \frac{\lambda_{\text{PVC}} S_{\text{PVC}}}{e_{\text{PVC}}} \right)^{-1} = 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Là-aussi, les fenêtres et leur mur porteur sont en parallèle d'où

$$R_{\text{mf}} = \left(\frac{1}{R_{\text{fen}}} + U(HL - h_f l_f - S_{\text{PVC}}) \right)^{-1} = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

4 La température étant la même de part et d'autre des murs, le studio ne reçoit aucun flux thermique de la part des autres appartements.

5 En régime permanent, la puissance \mathcal{P} nécessaire pour maintenir le studio à température constante doit compenser les fuites thermiques vers le couloir et la rue,

$$\mathcal{P} = \Phi_{\text{couloir}} + \Phi_{\text{rue}},$$

et ainsi

$$\mathcal{P} = \frac{T_s - T_c}{R_{\text{mp}}} + \frac{T_s - T_r}{R_{\text{mf}}} = 307 \text{ W}.$$

À titre de comparaison, le calculateur internet d'un grand magasin de bricolage (vert et blanc, pour ne pas le nommer) recommande pour un studio de ces dimensions localisé en Seine-Maritime un radiateur de puissance 2900 W. La différence vient bien sûr du fait que la puissance calculée ici est celle nécessaire en régime stationnaire, mais il faut une puissance nettement supérieure pour pouvoir augmenter la température de l'appartement sur une durée raisonnable.

Annales de concours

Exercice 4 : Conductivité thermique dépendant de la température [oral PT | 💡 1 | ✂ 2]

1 On suppose que $T = T(x)$ et donc $\vec{j} = j_x(x)\vec{e}_x$. Raisonons sur une tranche mésoscopique de section S égale à celle de la barre, comprise entre x et $x + dx$, entre t et $t + dt$. Par la face située en x , elle reçoit le flux

$$\phi_{\text{entrant}} = j_x(x)S$$

Par la face située en $x + dx$, elle cède le flux

$$\phi_{\text{sortant}} = j_x(x + dx)S$$

Comme le régime est stationnaire, l'enthalpie est constante, si bien que

$$dH = 0 = j_x(x)S - j_x(x + dx)S = -\frac{dj_x}{dx} dx S.$$

D'après la loi de Fourier,

$$j_x = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\frac{K}{T} \frac{dT}{dx},$$

et en remplaçant dans le premier principe, il vient

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} \right) = 0.$$

On retrouve ni plus ni moins que la conservation du flux thermique $\phi = j_x S$, logique car on est en régime stationnaire et sans terme source. Si l'énoncé n'avait pas demandé un bilan enthalpique, il aurait été plus judicieux de partir directement de ce résultat, sous la forme

$$\phi = -\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} S = \text{cte}.$$

Une première intégration donne

$$\frac{K}{T} \frac{dT}{dx} = A = \text{cte}.$$

Pour la deuxième intégration, on peut réécrire le résultat sous la forme

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A}{K} T \quad \text{d'où} \quad \boxed{T(x) = B e^{Ax/K} \quad \text{avec} \quad A, B \text{ deux constantes.}}$$

Pour cette deuxième intégration, on aurait aussi pu séparer les variables.

Pour résoudre une telle équation, il ne faut **SUUUURTOUT PAS** développer les dérivées, mais au contraire procéder en deux intégrations successives.

2 En $x = 0$,

$$T(0) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} B$$

et en $x = L$,

$$T(L) \underbrace{=}_{\text{CL}} T_1 \underbrace{=}_{\text{sol}} T_0 e^{AL/K} \quad \text{soit} \quad \frac{AL}{K} = \ln \frac{T_1}{T_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{K}{L} \ln \frac{T_1}{T_0} .}$$

Représentation graphique sur la figure 1.

3 En $x = 0$, la puissance cédée par la barre à l'extérieur s'écrit

$$\mathcal{P}_{x=0} = -j_x(0)S = +\frac{K}{T(0)} S \frac{dT}{dx}(0).$$

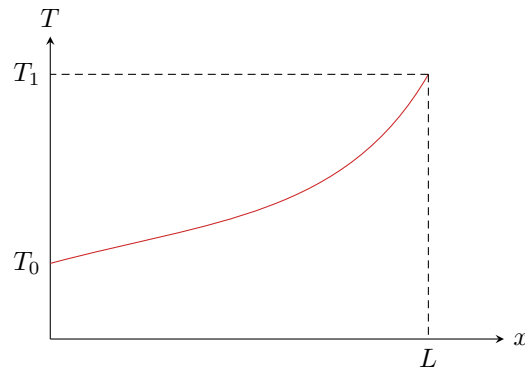


Figure 1 – Profil de température dans la barre. Attention, aucune des deux tangentes n'est horizontale : la dérivée spatiale de la température est proportionnelle au flux, qui n'est pas nul.

Or on a montré que

$$\frac{dT}{dx} = \frac{A}{K} T = \frac{T}{L} \ln \frac{T_1}{T_0} \quad \text{donc} \quad \frac{dT}{dx}(0) = \frac{T_0}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

En combinant les deux résultats,

$$\mathcal{P}_{x=0} = \frac{KS}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

De même, en $x = L$, la puissance cédée vaut

$$\mathcal{P}_{x=L} = -\frac{K}{T(L)} S \frac{dT}{dx}(L).$$

Puisque

$$\frac{dT}{dx}(L) = \frac{T(L)}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}$$

on en déduit de même

$$\mathcal{P}_{x=L} = -\frac{KS}{L} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Ces deux puissances sont opposées, autrement dit à chaque instant la barre cède d'un côté la puissance qu'elle reçoit de l'autre et n'accumule aucune énergie : c'était complètement prévisible puisque le régime est stationnaire.

Exercice 5 : Effets thermiques dans un conducteur électrique [écrit PT 2014 | 💡 3 | ✂️ 2 | ⊕]

1 La loi de Fourier indique

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Le vecteur densité de courant thermique est défini par l'intermédiaire de son flux : la quantité d'énergie δQ qui traverse une surface $d\vec{S}$ pendant dt est donné par

$$\delta Q = \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} dt.$$

En termes d'unités,

$$[j_{\text{th}}] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{et} \quad [\lambda] = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2 Comme T ne dépend que de r , les transferts thermiques ne sont que radiaux et \vec{j}_{th} est donc porté par \vec{e}_r . Les lignes de courant sont représentées figure 2, elles sont dirigées vers l'extérieur car la température y est inférieure à celle à l'intérieur du cylindre.

3 On raisonne sur une couche cylindrique de longueur $\ell = 1$ m (« longueur unité »), comprise entre r et $r + dr$. Les puissances échangées sont :

▷ le flux thermique entrant en r :

$$\phi_e = \iint_{S(r)} (j_r(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) = j_r(r) \times 2\pi r \ell$$

▷ le flux thermique sortant en $r + dr$: de même, $\phi_s = j_r(r + dr) \times 2\pi(r + dr) \ell$;

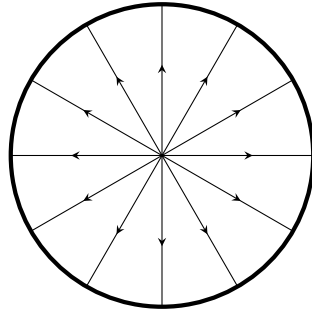


Figure 2 – Lignes de champ du vecteur densité de courant thermique dans le conducteur.

▷ la puissance libérée par effet Joule,

$$P_J = P_V \times 2\pi r \ell \, dr = \frac{2I^2}{\gamma\pi a^4} r \ell \, dr.$$

En régime permanent, le système n'accumule pas d'énergie donc

$$\phi_e - \phi_s + P_J = 0 \quad \text{soit} \quad 2\pi \ell r j_r(r) - 2\pi \ell (r + dr) j_r(r + dr) + \frac{2I^2}{\gamma\pi a^4} r \ell \, dr = 0.$$

Par un développement limité,

$$r j_r(r) - (r + dr) j_r(r + dr) = -\frac{d(r j_r)}{dr} dr,$$

et en simplifiant par $2\ell \, dr$

$$-\pi \frac{d(r j_r)}{dr} + \frac{I^2}{\gamma\pi a^4} r = 0.$$

Enfin, d'après la loi de Fourier,

$$j_r = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

d'où on obtient (en divisant par πr pour faire plus joli)

$$\boxed{\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{I^2}{\gamma\pi^2 a^4} = 0.}$$

La notion de « longueur unité » se rencontre parfois, mais n'est pas limpide du tout pour qui ne l'a pas déjà rencontrée ...

Plutôt qu'un bilan de puissance, on peut aussi procéder à un bilan d'énergie pendant une durée infinitésimale dt : c'est l'approche que j'ai choisie en cours.

4 L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{I^2}{\gamma\lambda\pi^2 a^4} r$$

donc par intégration,

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{I^2}{\gamma\lambda\pi^2 a^4} \frac{r^2}{2} + A \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{I^2}{2\gamma\lambda\pi^2 a^4} r + \frac{A}{r}$$

avec A une constante, mais comme dT/dr reste borné en $r = 0$, on a forcément $A = 0$.

La deuxième écriture est plus visuelle, mais se placer en $r = 0$ sur la première suffit pour conclure car cela donne directement $A = 0$.

On vérifie qu'on a comme prévu $dT/dr < 0$: la température diminue à mesure qu'on s'éloigne de l'axe.

Une deuxième intégration et la condition aux limites donnent enfin

$$\boxed{T(r) = -\frac{I^2}{4\gamma\lambda\pi^2 a^4} r^2 + T_0.}$$

Méthode à retenir ! Pour intégrer ce genre d'équation différentielle, qu'on retrouve dans plusieurs contextes, développer la dérivée est **une très mauvaise idée**.

5 On déduit

$$\vec{j}_{\text{th}}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{j}_{\text{th}}(r) = \frac{I^2}{2\gamma\pi^2 a^4} r \vec{e}_r.}$$

Avec la question 3, le flux thermique vaut

$$\Phi_{\text{th}}(r) = j_r(r) \times 2\pi r \ell \quad \text{soit} \quad \boxed{\Phi_{\text{th}}(r) = \frac{I^2}{\gamma\pi a^4} r^2 \ell.}$$

En $r = a$,

$$\Phi_{\text{th}}(a) = \frac{I^2}{\gamma\pi a^2} \ell = P_L \ell.$$

Il y a égalité entre le flux sortant du cylindre et la puissance libérée au sein du cylindre : cela est cohérent puisqu'en régime permanent le cylindre **n'accumule pas d'énergie**.

6 Tout le flux arrivant en a est cédé à l'atmosphère, donc

$$\Phi_{\text{th}}(a) = \Phi_{\text{Newton}} \quad \text{soit} \quad \frac{I^2}{\gamma\pi a^2} \ell = h \times 2\pi a \ell \times (T(a) - T_{\text{atm}}).$$

On en déduit

$$T(a) = T_{\text{atm}} + \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma h}$$

et en identifiant à la solution

$$T(a) = T_0 - \frac{I^2}{4\pi^2 a^2 \gamma \lambda}$$

d'où on déduit

$$\boxed{T_0 = T_{\text{atm}} + \frac{I^2}{2\pi^2 a^2 \gamma} \left(\frac{1}{ah} + \frac{1}{2\lambda} \right).}$$

7 Numériquement,

$$\boxed{T_0 = 130^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_0 - T(a) = 0,01 \text{ K}.}$$

Le conducteur est donc à une température quasiment uniforme. Ce résultat peut sembler étonnant, néanmoins le cuivre est un bon conducteur thermique, ce qui est favorable à l'uniformisation de la température (faible résistance thermique).

8 D'après la première expression de $T(a)$,

$$\boxed{I' = \sqrt{2\pi^2 a^3 \gamma h (T(a) - T_{\text{atm}})} = 1,4 \text{ kA}.}$$

Exercice 6 : Gel d'un lac

[oral Centrale PSI | 💡 2 | ✂ 2]

1 En régime stationnaire, le plus simple est d'utiliser la résistance thermique. En notant S la surface de glace, la couche d'épaisseur e a une résistance thermique

$$R = \frac{e}{\lambda S}.$$

Le flux Φ au travers de la couche de glace vaut donc

$$\Phi = \frac{T_f - T_s}{R} = \frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e}.$$

Or par définition $\Phi = j_Q S$ d'où on déduit

$$\boxed{j_Q = \frac{\lambda (T_f - T_s)}{e}.}$$

Compte tenu du sens dans lequel j'ai choisi d'orienter la différence de température, cette densité de courant thermique est orientée vers le haut, de l'eau du lac vers l'air.

Une autre méthode possible consiste à commencer par déterminer le profil de température $T(z)$ dans la glace à partir de l'équation de diffusion en régime stationnaire $\Delta T = \frac{d^2T}{dz^2} = 0$ et des conditions aux limites, puis d'utiliser la loi de Fourier.

2 Supposons le régime quasi-stationnaire, et procédons à un bilan enthalpique pour la couche infinitésimale d'eau de surface S qui gèle entre t et $t + dt$, de masse $\mu S de$. Elle ne reçoit pas de transfert thermique de la part de l'eau du lac, car elle est à la même température, et cède le transfert thermique $j_Q S dt$ à la glace. Ainsi,

$$dH \underset{\text{1er ppe}}{=} 0 - j_Q S dt \underset{\text{gel}}{=} -\mu S de \ell$$

car l'enthalpie de solidification est l'opposée de l'enthalpie de fusion. Ainsi,

$$\frac{\lambda(T_f - T_s)}{e} S dt = \mu S \ell de$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell e}}$$

3 Procédons par séparation des variables,

$$e de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} dt$$

soit en intégrant

$$\int_{e(0)}^{e(t)} e de = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} \int_0^t dt$$

d'où

$$\frac{1}{2} [e(t)^2 - 0] = \frac{\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t$$

et ainsi

$$\boxed{e(t) = \sqrt{\frac{2\lambda(T_f - T_s)}{\mu \ell} t}}$$

Numériquement, l'épaisseur vaut 11 cm au bout d'une journée, 29 cm au bout d'une semaine et 60 cm au bout d'un mois. C'est donc dans les premiers jours de gel que la couche de glace se forme le plus rapidement : comme on le constate sur l'expression de R , la couche de glace joue le rôle d'un isolant d'autant plus performant qu'il est épais.

Pour intégrer l'équation différentielle, on peut également reconnaître

$$e \frac{de}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (e^2),$$

et utiliser la condition initiale $e(0) = 0$.

Exercice 7 : Isolation d'un mur

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 1 | ⊗]

1 Cf. cours. Le coefficient de diffusion $D = \lambda/\rho c_p$ s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

2 En régime permanent l'équation de diffusion devient

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

et par deux intégrations successives on obtient

$$T(x) = ax + b.$$

En $x = 0$, à l'intérieur de la maison,

$$T(x) \underset{\text{CL}}{=} T_{\text{int}} \underset{\text{sol}}{=} b.$$

En $x = e$, à l'extérieur de la maison,

$$T(x) \underbrace{=}_{CL} T_{\text{ext}} \underbrace{=}_{\text{sol}} ae + b = ae + T_{\text{int}} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}.$$

On en déduit finalement

$$T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}}.$$

L'allure est représentée figure 3.

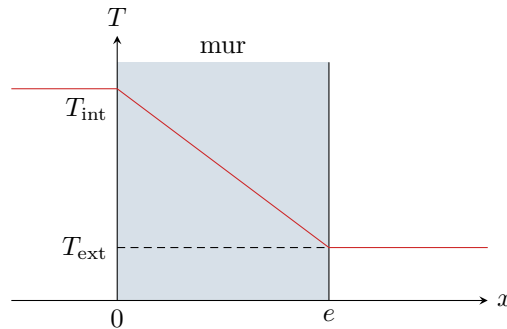


Figure 3 – Profil de température dans le mur non isolé.

3 Raisonnons sur les résistances thermiques. Le schéma électrique équivalent du mur isolé est représenté figure 4. Le polystyrène recouvre le béton, ils sont donc traversés par le même flux, et les deux résistances thermiques du béton R_b et du polystyrène R_p sont montées en série. La résistance thermique totale vaut donc

$$R_{\text{tot}} = R_b + R_p = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}.$$

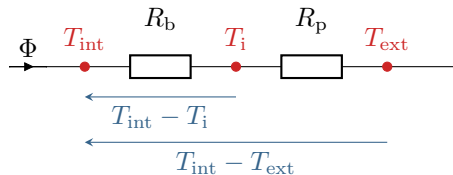


Figure 4 – Schéma électrique équivalent au mur isolé.

Par définition, le flux thermique Φ , la résistance thermique R_{tot} et la différence de température ΔT de part et d'autre du mur sont reliés par

$$\Delta T = R_{\text{tot}} \Phi.$$

Pour diviser par 10 les besoins de chauffage, il faut diviser par 10 le flux thermique à ΔT fixé, ce qui est possible si

$$\frac{e'}{\lambda'} = 9 \frac{e}{\lambda} \quad \text{soit} \quad e' = 9e \frac{\lambda'}{\lambda} = 5,3 \text{ cm}.$$

Cette valeur paraît bien faible par rapport aux recommandations actuelles : pour un bâtiment basse consommation (qui devient la norme des constructions neuves à partir de 2020), on recommande une épaisseur de 18 cm de polystyrène expansé.

4 Les deux résistances étant montées en série, on utilise l'analogie du pont diviseur de tension pour déterminer la température T_i à l'interface entre le béton et le polystyrène. Avec les notations de la figure 4,

$$\frac{T_{\text{int}} - T_i}{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}} = \frac{R_b}{R_b + R_p}$$

d'où on déduit

$$T_i = T_{\text{int}} - \frac{R_b}{R_b + R_p} (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) = 17,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

On en déduit le profil de température de la figure 5.

Ce résultat n'est pas surprenant : la plus grande tension (ici la plus grande différence de température) se trouve aux bornes de la résistance la plus élevée.

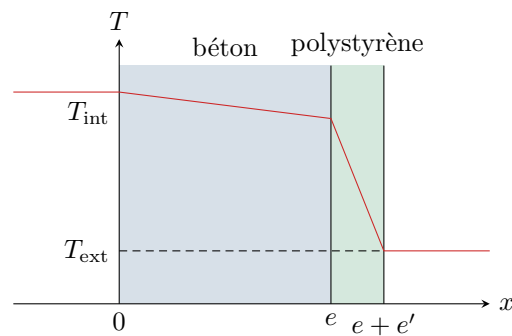


Figure 5 – Profil de température dans le mur isolé.

5 La fenêtre et le mur isolé sont soumis à la même différence de température : leurs résistances thermiques sont donc montées en parallèle, voir figure 6. La résistance thermique de l'ensemble vaut donc

$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_b + R_p} + \frac{1}{R_{\text{fen}}} = \frac{1}{R_b + R_p} + g_{\text{fen}} S_{\text{fen}}.$$

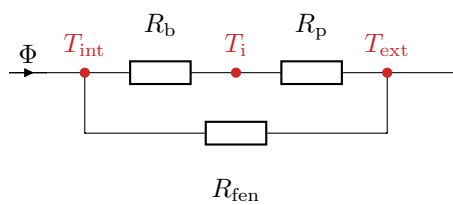


Figure 6 – Schéma électrique équivalent au mur isolé avec fenêtre.

On en déduit le flux total,

$$\Phi = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_{\text{tot}}} = 86 \text{ W}.$$

Exercice 8 : Bilan thermique d'un astéroïde

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | 🌀]

Les compte-rendus des candidats mentionnent qu'il y avait beaucoup de texte parlant de, je cite, « ce qu'est un astéroïde et les métaux précieux qu'ils contiennent ». Des valeurs numériques étaient fournies au candidat ... mais ce n'est pas évident à reconstituer, on fera donc sans.

1 L'hypothèse d'équilibre thermodynamique indique que la température ne dépend **pas du temps**, et celle d'astéroïde sphérique qu'elle ne dépend **que de r**.

2 Raisonnons sur une transformation infinitésimale de durée dt .

Comme on est en régime stationnaire, c'est de toute façon sans importance : la durée de la transformation se simplifiera en fin des calculs. Il aurait été plus judicieux que l'énoncé demande de calculer les puissances thermiques.

Compte tenu de la question précédente, $\vec{j} = j_r(r) \vec{e}_r$. Le flux conductif sortant de la sphère de rayon r vaut donc

$$\phi_{\text{cond}} = \iint_{\text{sphère}} j_r(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = j_r(r) \iint dS \quad \text{soit} \quad \phi_{\text{cond}} = 4\pi r^2 j_r(r).$$

Or d'après la loi de Fourier et compte tenu des symétries,

$$j_r = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Ainsi, puisque $\delta Q_{\text{cond}} = \phi_{\text{cond}} dt$,

$$\delta Q_{\text{cond}} = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt.$$

3 On somme cette fois sur le volume de la sphère étudiée,

$$\delta Q_{\text{rad}} = \iiint \mathcal{P} d\tau dt \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mathcal{P} dt.$$

4 Énoncé rigoureux : cf. cours ... le candidat mentionne de toute façon dans son compte-rendu que « ça n'intéressait pas l'examineur qui ne voulait que l'équation ».

Étant en régime stationnaire, et comme δQ_{cond} est une énergie *cédée*,

$$dH = 0 = \delta Q_{\text{rad}} - \delta Q_{\text{cond}} \quad \text{d'où} \quad \delta Q_{\text{rad}} = \delta Q_{\text{cond}}.$$

5 Ainsi,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \mathcal{P} dt = -4\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} dt \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{P}r}{3} = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

On peut intégrer p.ex. en séparant les variables,

$$\int_{T_0}^{T(r)} dT = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \int_0^r r dr \quad \text{soit} \quad T(r) - T_0 = -\frac{\mathcal{P}}{3\lambda} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right)$$

ce qui donne

$$T(r) = T_0 - \frac{\mathcal{P}}{6\lambda} r^2.$$

Remarquer qu'on obtient ici une expression de la température dans l'astéroïde de façon bien plus simple qu'en démontrant et résolvant l'équation de diffusion.

6 La continuité du flux thermique à la surface de l'astéroïde indique que

$$\phi_{\text{cond}}(r=R) = \mathcal{P}_{\text{ray}}$$

La continuité du flux thermique indique simplement que l'énergie ne peut pas s'accumuler à la surface de l'astéroïde : toute l'énergie qui arrive par conduction doit être émise par rayonnement.

Il ne faut pas confondre avec la conservation du flux en régime stationnaire, qui n'est pas vérifiée à cause de la production d'énergie par radioactivité.

Ainsi,

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \sigma T_s^4 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathcal{P}R}{3} = \sigma T_s^4$$

On peut alors exprimer la température de surface,

$$T_s = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma} \right)^{1/4},$$

et en déduire la température au centre,

$$T_0 = \left(\frac{\mathcal{P}R}{3\sigma} \right)^{1/4} + \frac{\mathcal{P}}{6\lambda} R^2.$$

Exercice 9 : Igloo

[oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2]

1 Entre t et $t + dt$, la demi-sphère considérée reçoit un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{int}} = 4\mathcal{P} dt$$

produit par les quatre explorateurs ($\mathcal{P} = 50 \text{ W}$) et cède à l'extérieur un transfert thermique

$$\delta Q_{\text{ext}} = \Phi dt$$

avec Φ le flux thermique sortant de la surface considérée. En régime permanent, le bilan enthalpique s'écrit donc

$$dH = 0 = 4\mathcal{P} dt - \Phi dt \quad \text{d'où} \quad \Phi = 4\mathcal{P}.$$

Le flux thermique Φ est donc **indépendant du rayon r de la surface considérée**.

2 On néglige tout transfert thermique par le sol. Dans la demi-sphère, le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$\vec{j} = j_r(r) \vec{u}_r.$$

Le flux sortant au travers d'une demi-sphère de rayon r s'exprime donc

$$\Phi = j_r(r) \times \frac{4\pi r^2}{2}.$$

Or d'après la loi de Fourier, avec ces symétries,

$$\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r,$$

d'où on déduit

$$\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi r^2 \lambda}.$$

On peut alors séparer les variables,

$$dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \frac{dr}{r^2},$$

puis intégrer

$$\int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \int_R^{R+e} \frac{dr}{r^2}$$

ce qui donne

$$T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} \left(-\frac{1}{R+e} + \frac{1}{R} \right).$$

Par définition de la résistance thermique, on identifie

$$\mathcal{R}_{\text{igloo}} = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{R}_{\text{igloo}} = \frac{1}{2\pi\lambda} \frac{e}{R(R+e)} > 0.}$$

La méthode de calcul d'une résistance thermique en géométrie quelconque ne fait pas partie du programme au sens strict et il est peu probable qu'elle tombe à l'écrit, mais (à mon avis ...) se doit d'être retenue pour aller à l'oral. L'idée est de passer par l'intermédiaire de \vec{j} pour relier le flux Φ à la différence de température, surtout en contournant l'équation de la diffusion thermique.

- ▷ analyse des symétries pour identifier les variables dont dépend \vec{j} ;
- ▷ calcul du flux (qui est conservatif en régime stationnaire en l'absence de source) en fonction de la composante utile de \vec{j} ;
- ▷ utilisation de la loi de Fourier pour remplacer \vec{j} et relier Φ à la dérivée première de la température ;
- ▷ séparation des variables et intégration pour identifier \mathcal{R} .

3 D'après la question précédente, la résistance thermique de l'igloo est d'autant plus grande que le rayon R est petit : **les explorateurs ont donc intérêt à construire un petit igloo**.

La dépendance en e à R fixée est moins évidente à constater (il faut ou bien tracer, ou bien dériver), mais comme on pouvait s'y attendre la résistance thermique augmente avec e mais il n'y a pas proportionnalité comme dans le cas cartésien.

4 D'après la question 1, $\Phi = 4\mathcal{P}$. En utilisant la résistance thermique,

$$\boxed{T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} + 4\mathcal{P}\mathcal{R}_{\text{igloo}} = 11 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Exercice 10 : Four industriel

[oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2]

1 Procédons à un bilan enthalpique pour la pièce entre t et $t + dt$. La surface de la pièce vaut $6a^2$, donc elle reçoit le transfert thermique

$$\delta Q = P_s 6a^2 dt = 6a^2 h(T_a - T) dt.$$

Ainsi,

$$dH \underset{\text{Joule}}{=} \rho a^3 c_p dT \underset{\text{1er P}}{=} 6a^2 h(T_a - T) dt$$

d'où on déduit

$$\rho a c_p \frac{dT}{dt} + 6hT = 6hT_a \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{6h}{\rho a c_p} T = \frac{6h}{\rho a c_p} T_a.}$$

En posant $\tau = \rho a c_p / 6h$ et T_0 la température initiale de la pièce, cette équation différentielle se résout en

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}.$$

2 Par définition, $T(t = \tau_c) = T_c$, c'est-à-dire

$$T_c = T_a + (T_0 - T_a) e^{-\tau_c/\tau} \quad \text{soit} \quad e^{-\tau_c/\tau} = \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

d'où on déduit

$$\tau_c = -\tau \ln \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a}$$

et en inversant le ln et en remplaçant τ par son expression, il vient enfin

$$\boxed{\tau_c = \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

Ce temps τ_c correspond à la durée que la pièce doit passer dans le four. Sachant que le tapis roulant a une longueur L , on doit avoir $\tau_c = L/V_0$ d'où

$$\boxed{V_0 = \frac{6hL}{\rho a c_p \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

3 Cf. cours pour la démonstration, on aboutit à

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion, on trouve $[D] = L^2 T^{-1}$. Cherchons par analyse dimensionnelle le temps τ_d caractéristique de la diffusion sur une longueur a , en le prenant sous la forme

$$\tau_d = D^\alpha a^\beta$$

avec les exposants α et β constants. L'équation aux dimensions s'écrit

$$T = L^{2\alpha} T^{-\alpha} \times L^\beta$$

d'où on déduit par identification



$$\{1 = -\alpha 0 = 2\alpha + \beta \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

si bien que

$$\boxed{\tau_d = \frac{a^2}{D}.$$

4 Pour que la température de la pièce soit uniforme en sortie du four, il faut avoir

$$\tau_d \ll \tau_c \quad \text{donc} \quad \frac{a^2 \rho c_p}{\lambda} \ll \frac{\rho a c_p}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a} \quad \text{soit} \quad \boxed{a \ll \frac{\lambda}{6h} \ln \frac{T_0 - T_a}{T_c - T_a}.$$

Exercice 11 : Régime sinusoïdal, onde thermique[écrit CCP MP 2014 |  3 |  2]

1 Le sol et la température de surface sont invariantes par translation selon les axes (Ox) et (Oy), donc $T(M, t)$ également : elle ne dépend que de z .

2 La loi de Fourier relie le vecteur densité de flux thermique \vec{j}_{th} au gradient de température T par

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

3 En remplaçant dans l'équation de la chaleur,

$$\rho c j \omega f(z) e^{j\omega t} = \lambda \frac{d^2 f}{dz^2} e^{j\omega t} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{\rho c}{\lambda} j \omega f(z) = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{j\omega}{D} f(z) = 0.$$

4 Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle s'écrit

$$r^2 - \frac{j\omega}{D} = 0 \quad \text{d'où} \quad r^2 = j \frac{\omega}{D} = e^{j\pi/2} \frac{\omega}{D} \quad \text{soit} \quad r = \pm e^{j\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}.$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme

$$f(z) = A \exp \left[(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right] + B \exp \left[-(1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right].$$

Lorsque $z \rightarrow \infty$, le premier terme de cette solution diverge alors que la température reste finie. On en déduit que la constante A est forcément nulle.

5 La solution sur θ s'écrit

$$\theta(z, t) = B \exp \left[-z \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \right] \exp \left[j \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z \right) \right]$$

Par identification avec la forme de l'énoncé, on pose

$$\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}.$$

En outre, à la surface du sol,

$$\theta(0, t) \underbrace{=}_{\text{sol}} B e^{j\omega t} \underbrace{=}_{\text{CL}} \alpha e^{j\omega t} \quad \text{d'où} \quad B = \alpha.$$

Ainsi,

$$\theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)}.$$

6 En prenant la partie réelle,

$$\theta(z, t) = \text{Re} \theta(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad \text{d'où} \quad T(z, t) = T_0 + \alpha e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta).$$

La température varie sinusoïdalement à la même pulsation que la température de surface, mais l'amplitude de ses variations est d'autant plus faible que l'on s'enfonce dans le sol. Le paramètre δ est la distance caractéristique sur laquelle l'amplitude diminue, c'est l'analogie d'une profondeur de peau en électromagnétisme.

Cette analogie n'est pas surprenante : l'équation de propagation des champs électromagnétiques dans un conducteur ohmique est une équation de diffusion, cf. cours sur les ondes électromagnétiques.

7 La distance L_{10} est telle que

$$e^{-L_{10}/\delta} = \frac{1}{10} \quad \text{soit} \quad -\frac{L_{10}}{\delta} = -\ln 10 \quad \text{d'où} \quad L_{10} = \delta \ln 10.$$

8 Les deux pulsations à considérer valent respectivement

$$\omega_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{24 \text{ heures}} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{an}} = \frac{2\pi}{365 \text{ jours}} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les profondeurs caractéristiques associées valent respectivement

$$L_{10,\text{jour}} = 20 \text{ cm} \quad \text{et} \quad L_{10,\text{an}} = 3,7 \text{ m}.$$

Il faut donc enfouir la canalisation à quelques mètres sous terre pour s'affranchir des variations journalières de température.

En pratique, la géothermie de surface utilise des canalisations enfouies à environ 1 m sous le sol, ce qui est un compromis entre stabilité de la température et profondeur, donc coût, du forage.

9 D'après la question 6, on peut écrire

$$T(z, t) = T_0 + \alpha e^{-z/\delta} \cos[\omega(t - \tau)] \quad \text{avec} \quad \tau(z) = \frac{z}{\delta\omega}.$$

Le retard pour $z = L_{10} = \delta \ln 10$ s'écrit donc

$$\Delta t = \tau(L_{10}) \quad \text{soit} \quad \Delta t = \frac{\ln 10}{\omega}.$$

Numériquement,

$$\Delta t_{\text{jour}} = 8 \text{ heures } 48 \text{ minutes} \quad \text{et} \quad \Delta t_{\text{an}} = 47 \text{ jours } 17 \text{ heures}.$$

10 Le modèle développé est pertinent pour estimer des ordres de grandeur. En revanche, il ne prend pas en compte les variations saisonnières de la conductivité thermique du sol, qui dépend manifestement du taux d'humidité et donc de la pluviométrie.

Problème ouvert

Exercice 12 : Combinaison de plongée

[oral CCP PSI | 💡 3 | ✂ 2]

On est a priori dans un régime transitoire, mais vues les données on suppose pouvoir le traiter dans le cadre de l'ARQS ... et donc utiliser les résistances thermiques.

1 La puissance P_{conv} est un flux, auquel on peut associer la résistance thermique $R_{\text{conv}} = 1/\alpha S = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ en prenant $S \sim 2 \text{ m}^2$ la surface de la peau. La peau et cette résistance conducto-convective sont montées en série, donc

$$R_{\text{tot}} = R_{\text{conv}} + R_{\text{peau}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Le premier principe appliqué au baigneur pendant une durée infinitésimale dt donne

$$dH = mc_{\text{corps}} dT = -\Phi_{\text{tot}} dt + P_{\text{corps}} dt = \frac{T_{\text{mer}} - T}{R_{\text{tot}}} dt + P_{\text{corps}} dt$$

Comme la chute de température qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de température entre le corps et la mer, on peut estimer grossièrement l'ordre de grandeur sans résoudre l'équation différentielle en supposant $T_{\text{mer}} - T(t) \simeq T_{\text{mer}} - T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Alors,

$$mc_{\text{corps}} \Delta T = \left(\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \right) \Delta t$$

soit

$$\Delta t = \frac{mc_{\text{corps}}}{\frac{T_{\text{mer}} - T_0}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}} \Delta T$$

Numériquement, pour un baigneur de masse $m = 70 \text{ kg}$,

$$\Delta t \simeq 3,2 \cdot 10^3 \text{ s} = 53 \text{ minutes},$$

ce qui semble raisonnable.

2 À la résistance totale à il faut ajouter celle de la combinaison, qu'on modélise comme une paroi plane,

$$R_{\text{combi}} = \frac{e}{\lambda_{\text{néo}} S}$$

Le premier principe mis sous forme d'une équation différentielle s'écrit

$$m c_{\text{corps}} \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}}$$

Au bout d'un temps infini, le transitoire est terminé, et seule reste la solution particulière qui est constante :

$$0 + \frac{T_{\infty}}{R_{\text{tot}}} = \frac{T_{\text{mer}}}{R_{\text{tot}}} + P_{\text{corps}} \quad \text{soit} \quad T_{\infty} = T_{\text{mer}} + R_{\text{tot}} P_{\text{corps}}.$$

On veut $T_{\infty} > T_{\text{hypo}} = 35 \text{ }^{\circ}\text{C}$, et il ne reste qu'à résoudre pour trouver e . À toi de bosser !)