BLAISE PASCAL
PT 2019-2020

TD 9 – Thermodynamique

Conduction thermique

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ce code pour accéder aux corrigés

Exercices

Exercice 1 : Température dans une barre solide [1 | 1 |]

On s'intéresse au transfert thermique dans une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface est calorifugée. La barre est faite d'un matériau de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures T_1 et T_2. On admet que le champ de température dans la barre ne dépend que de x et de t.

1 - Établir l'équation de la chaleur. Définir le coefficient de diffusion thermique D.

2 - En supposant la barre initialement à une température uniforme, estimer la durée du régime transitoire. Commenter le résultat. Quelle est l'influence des températures T_1 et T_2 ?

3 - Déterminer le profil de température $T(x)$ en régime permanent. Le tracer.

4 - Montrer que le flux thermique dans la barre ne dépend pas de x. En déduire la résistance thermique R_{th} de la barre.

5 - (Un peu plus difficile et un peu moins important) En appliquant le second principe de la thermodynamique à la barre en régime permanent, montrer que le taux de production d'entropie (quantité d'entropie crée par unité de temps) vaut

$$\frac{\delta S_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_{\mathrm{th}}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1\, T_2} \,.$$

Commenter le résultat.

Exercice 2 : Ailette de refroidissement [2 | 2 |]

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.

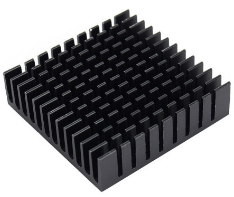


Figure 1 – **Ailettes de refroidissement d'un processeur.**

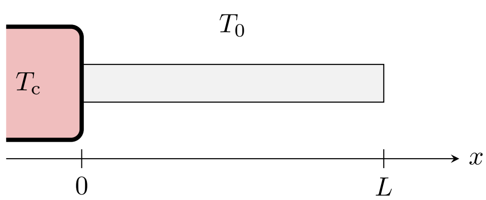


Figure 2 – **Schéma de l'ailette étudiée.**

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_{c}, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi(x) = h(T(x) - T_0)\,\mathrm{d}S \,.$$

Hypothèses de travail :
- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0\,,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 1 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

Exercice 3 : Chauffage d'un studio [💡 2 | ✂ 2]

Le but de l'exercice est de dimensionner le système de chauffage d'un studio dont le plan est représenté figure 3. Le studio possède une hauteur sous plafond $H = 2{,}5\,\mathrm{m}$, il est entouré de quatre appartements voisins (à sa droite, gauche, au dessus et en dessous), chauffés à la même température T_s que le studio. Il donne sur une rue à température T_r, et s'ouvre sur un couloir à la température T_c.

Les murs sont tous constitués d'une même épaisseur e_b de béton, isolés par la même épaisseur e_i de laine de verre. La porte d'entrée est en bois, de dimensions $h \times l \times e$, et le mur donnant sur la rue est agrémenté de deux fenêtres en double vitrage à monture en PVC, dont le schéma est donné figure 4. Chaque fenêtre a pour dimensions $h_f \times \dfrac{l_f}{2} \times e_f$.

Les applications numériques pouvant être un peu fastidieuses, elles gagneront à être réalisées sous forme d'un fichier Python, définissant une variable pour chaque paramètre et chaque grandeur calculée.

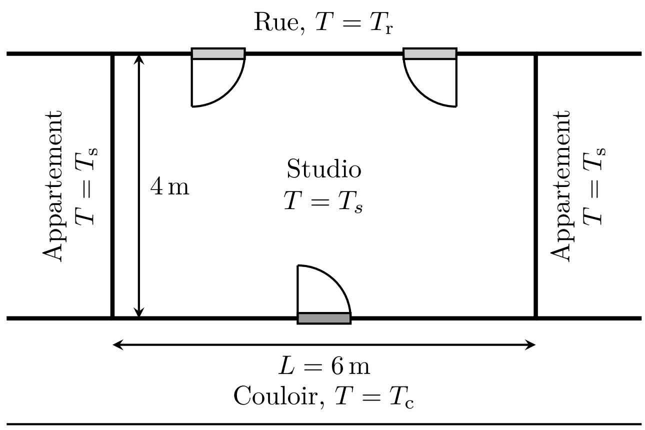


Figure 3 – Plan du studio.

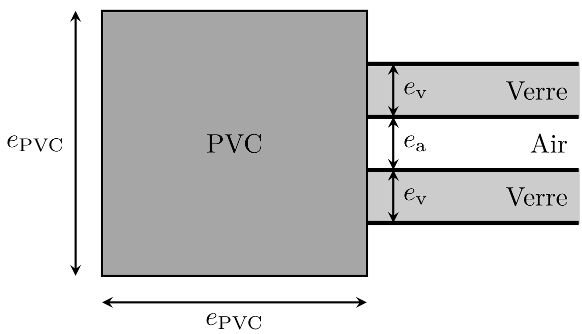


Figure 4 – Coupe horizontale d'une fenêtre.

1 - Chaque mur en béton est isolé par de la laine de verre. Calculer la conductance thermique surfacique U du mur isolé, c'est-à-dire l'inverse de la résistance thermique présentée par un mètre carré de mur. Ce coefficient U est couramment utilisé dans le domaine de l'habitat où il est nommé « coefficient de performance thermique ».

2 - Calculer la valeur de la résistance R_mp équivalente au système mur+porte donnant sur le couloir.

3 - Calculer la valeur de la résistance R_fen équivalente aux fenêtres, puis celle R_mf du système mur+fenêtres.

4 - Que vaut le flux reçu par le studio de la part des appartements voisins ?

5 - Calculer la puissance nécessaire pour maintenir le studio à la température voulue.

Données :
- ▷ Températures : $T_\mathrm{s} = 20\,°\mathrm{C}$; $T_\mathrm{r} = 0\,°\mathrm{C}$; $T_\mathrm{c} = 15\,°\mathrm{C}$.
- ▷ Épaisseur du béton $e_\mathrm{b} = 15\,\mathrm{cm}$, de la laine de verre : $e_\mathrm{i} = 5\,\mathrm{cm}$.
- ▷ Dimensions de la porte : $h = 215\,\mathrm{cm}$, $l = 90\,\mathrm{cm}$ et $e = 5\,\mathrm{cm}$.

- ▷ Dimensions extérieures des fenêtres : $h_f = 115\,\mathrm{cm}$, $\dfrac{l_f}{2} = 100\,\mathrm{cm}$ et $e_\mathrm{a} = e_\mathrm{v} = 5\,\mathrm{mm}$. La vitre est maintenue par un montant en PVC d'épaisseur $e_\mathrm{PVC} = 5\,\mathrm{cm}$.
- ▷ Conductivités thermiques, en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$:

Matériaux	Conductivité thermique
Bois	0,15
PVC	0,17
Béton	0,92
Laine de verre	0,03
Verre	1,2
Air	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$

Annales de concours

Exercice 4 : Conductivité thermique dépendant de la température [oral PT | 1 | 2]

On étudie la conduction thermique dans une barre cylindrique de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$ dont les parois latérales sont calorifugées. Cette barre est faite d'un matériau dont la conductivité thermique dépend de la température selon la relation $\lambda = K/T$, avec $K > 0$ une constante.

1 - Par un bilan enthalpique, déterminer la forme mathématique de $T(x)$ en régime stationnaire.

2 - On donne $T(0) = T_0 = 300\,\mathrm{K}$ et $T(L) = T_1 = 350\,\mathrm{K}$. Déterminer complètement $T(x)$ et le représenter sur un graphique.

3 - Étudier la puissance thermique transmise en $x = 0$ et $x = L$.

Exercice 5 : Effets thermiques dans un conducteur électrique [écrit PT 2014 | 3 | 2 |]

La puissance thermique libérée par effet Joule dans un conducteur parcouru par un courant intense peut provoquer une élévation importante de la température à l'intérieur du conducteur. Il s'agit ici d'évaluer, dans le cadre d'un modèle très simple, la température d'un conducteur cylindrique. Ce conducteur, d'axe Oz, de très grande longueur L_c, de rayon $a = 1\,\mathrm{cm}$ et de conductivité électrique γ, est parcouru par un courant $I = 1\,\mathrm{kA}$.

Une première partie d'électromagnétisme permet de monter que la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le cylindre vaut

$$P_\mathrm{V} = \frac{I^2}{\gamma\,\pi^2 a^4}\,,$$

et que la puissance dissipée par unité de longueur du conducteur est

$$P_\mathrm{L} = \frac{I^2}{\gamma\,\pi a^2}\,.$$

L'étude est faite, en régime permanent, sur l'unité de longueur du conducteur, à une distance suffisante des extrémités pour pouvoir négliger les effets de bord ; ainsi la température dans le conducteur ne dépend que de la variable radiale r : $T(M,t) = T(r)$.

1 - Rappeler la loi de Fourier. Définir le vecteur densité de courant d'énergie thermique $\vec{j}_\mathrm{th}$ et indiquer la dimension de j_th et celle de la conductivité thermique λ.

2 - Préciser la direction du vecteur $\vec{j}_\mathrm{th}$ dans le conducteur et représenter quelques lignes de courant sur un schéma dans un plan perpendiculaire à Oz, en justifiant leur sens.

3 - Par un bilan de puissance sur un volume de longueur unité, compris entre les cylindres de rayon r et de rayon $r+\mathrm{d}r$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$.

4 - Par intégration, déterminer $T(r)$ en fonction des données et de la température $T_0 = T(r=0)$. Il sera admis que le « gradient » de température $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r$ reste borné dans le conducteur, en particulier en $r = 0$.

5 - En déduire l'expression de $\vec{j}_\mathrm{th}(r)$ ainsi que celle du flux thermique $\Phi_\mathrm{th}(r)$ à travers un cylindre d'axe Oz, de longueur unité et de rayon r, $r \in [0,a]$. Comparer la valeur de $\Phi_\mathrm{th}(a)$ à celle de P_L. Commenter.

6 - Le flux thermique transféré par le conducteur à l'atmosphère, à la température $T_{\text{atm}} = 25\,°\text{C}$, est donné par la loi de Newton :

$$\Phi_{\text{th}} = hS\left(T(a) - T_{\text{atm}}\right) ,$$

S est la surface de contact entre les deux milieux et h un coefficient d'échange. Établir l'expression de T_0.

7 - Pour le cuivre, $\gamma = 6 \cdot 10^7\,\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$, $\lambda = 4 \cdot 10^2\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $h = 8\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer T_0 puis $T_0 - T(a)$. Commenter.

8 - Un capteur de température est collé sur la surface du conducteur cylindrique. Quelle est l'intensité I' du courant dans le conducteur lorsque le capteur indique $T'(a) = 235\,°\text{C}$?

Exercice 6 : Gel d'un lac [oral Centrale PSI | 💡 2 | ✂ 2]

On étudie la formation d'une couche de glace à la surface d'un lac. La température en surface est $T_{\text{s}} = -10\,°\text{C}$ alors que l'eau liquide du lac est à sa température de fusion T_{f}. On note $e(t)$ l'épaisseur de la couche de glace à l'instant t et on suppose que $e(t=0) = 0$.

1 - Exprimer la densité de courant thermique j_Q dans la couche de glace en régime stationnaire en fonction de e notamment.

2 - On note de l'épaisseur de glace formée entre t et $t + \text{d}t$. Exprimer de en fonction de j_Q, de l'enthalpie de fusion de la glace ℓ et de sa masse volumique μ. En déduire une équation différentielle vérifiée par $e(t)$.

3 - Résoudre cette équation et déterminer l'épaisseur formée au bout d'une journée, d'une semaine et d'un mois. Commenter.

Données : caractéristiques de la glace.
- ▷ Conductivité thermique : $\lambda = 2{,}1\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- ▷ Masse volumique : $\mu = 917\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- ▷ Enthalpie de fusion : $\ell = 333\,\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Exercice 7 : Isolation d'un mur [oral banque PT | 💡 2 | ✂ 1 | ⊛]

> *Le secteur du bâtiment représente 44 % de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31 %). Chaque année, le secteur du bâtiment émet plus de 123 millions de tonnes de CO_2, près du quart du total national, ce qui en fait l'un des domaines clé dans la lutte contre le réchauffement climatique et la transition énergétique. Pour rendre le bâtiment plus économe en énergie, il faut rénover massivement l'existant et développer des normes plus strictes en termes de consommation d'énergie pour les bâtiments neufs. C'est l'objet de la politique de l'énergie dans les bâtiments.*
>
> *(Extrait du site internet du Ministère de la Transition Écologique et Solidaire)*

On s'intéresse à un mur de béton de surface $S = 25\,\text{m}^2$ et d'épaisseur $e = 15\,\text{cm}$. Le béton a pour conductivité thermique $\lambda = 0{,}92\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Il règne à l'extérieur de l'habitation une température de $4\,°\text{C}$ et à l'intérieur une température de $19\,°\text{C}$.

1 - Montrer que la température dans le mur est solution de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

Exprimer D et son unité.

2 - Déterminer et tracer l'allure du profil de température $T(x)$ dans le mur en régime permanent.

3 - On superpose au mur une épaisseur e' de polystyrène expansé de conductivité $\lambda' = 0{,}036\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Déterminer l'épaisseur e' nécessaire pour diviser la consommation en chauffage de l'habitation par 10.

4 - Déterminer et tracer l'allure du nouveau profil de température.

5 - Dans ce mur se trouve une fenêtre en double vitrage de $2\,\text{m}^2$ de conductivité thermique surfacique $g_{\text{fen}} = 2{,}8\,\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer le flux total au travers du mur.

Exercice 8 : Bilan thermique d'un astéroïde [oral banque PT | 💡 2 | ⌘ 2 | ⊛]

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R, de conductivité λ, à l'équilibre thermodynamique. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivté : pendant un temps $\mathrm{d}t$, chaque élément de volume $\mathrm{d}\tau$ de l'astéroïde reçoit une énergie $\mathcal{P}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$, $\mathcal{P}$ étant une constante. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1 - De quelles variables dépend la température dans l'astéroïde ?

2 - Calculer la chaleur cédée par la sphère de rayon r par conduction, en fonction notamment de la conductivité λ de l'astéroïde et du rayon r de la sphère.

3 - Calculer la chaleur créée dans la sphère de rayon r par radioactivité.

4 - Énoncer le premier principe de la thermodynamique. En déduire une relation entre ces deux chaleurs.

5 - Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, $\mathcal{P}$, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

L'astéroïde émet à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\mathcal{P}_{\mathrm{ray}} = \sigma {T_\mathrm{s}}^4$, avec σ une constante et T_s la température de surface.

6 - Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, σ et $\mathcal{P}$.

Exercice 9 : Igloo [oral banque PT | 💡 2 | ⌘ 2]

Quatre explorateurs sur la banquise construisent un igloo de rayon R pour s'abriter du froid. Les murs sont d'épaisseur $e = 50\,\mathrm{cm}$ et chaque explorateur dégage une puissance de $50\,\mathrm{W}$. L'igloo est fait de neige tassée de conductivité thermique $0{,}5\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

1 - Montrer que le flux sortant d'une demi-sphère de rayon $R \leq r \leq R + e$ ne dépend pas de son rayon.

2 - En déduire la résistance thermique de l'igloo.

3 - Les explorateurs ont-ils intérêt à construire un igloo de grande ou petite taille ?

4 - L'igloo a un rayon intérieur de $1\,\mathrm{m}$ et la température externe est de $-10\,°\mathrm{C}$. Déterminer la température interne en régime permanent.

Exercice 10 : Four industriel [oral banque PT | 💡 2 | ⌘ 2]

Cet exercice s'intéresse au chauffage d'une pièce dans un four industriel. La pièce est cubique de côté a, faite d'un matériau de capacité thermique massique c_p, de conductivité thermique λ et de masse volumique ρ. La pièce est posée sur un tapis roulant de longueur L reliant les deux extrémités du four avançant à vitesse constante V_0. La température de l'air à l'intérieur du four est uniformément égale à T_a. Dans le four, la pièce reçoit un flux surfacique $P_\mathrm{s} = h(T_\mathrm{a} - T)$ avec h une constante positive. L'objectif est de déterminer la vitesse V_0 du tapis pour que la pièce atteigne la température de consigne T_c.

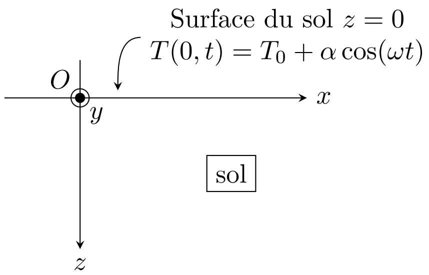
1 - On suppose que la température de la pièce est uniforme. Déterminer $T(t)$.

2 - En déduire le temps nécessaire pour atteindre la température de consigne puis la vitesse V_0 en fonction de a.

3 - Établir l'équation de la chaleur à une dimension. En déduire un temps caractéristique de diffusion.

4 - En déduire une condition sur a impliquant λ, h et les températures pour que la température dans la pièce soit uniforme en sortie du four.

Exercice 11 : Régime sinusoïdal, onde thermique [écrit CCP MP 2014 | 💡 3 | ⌘ 2]



L'objet de cet exercice est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation d'une installation géothermique.

On se place en repère cartésien. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy). La température au niveau de cette surface, notée $T(0,t)$, varie sinusoïdalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 : $T(0,t) = T_0 + \alpha\cos(\omega t)$, où α est une constante. Soit un point M dans le sol repéré par ses coordonnées (x, y, z) avec $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température en M, noté $T(M,t)$.

1 - Justifier que $T(M,t)$ ne dépend ni de x ni de y. On notera dans la suite $T(M,t) = T(z,t)$.

2 - Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique, en rappelant les grandeurs intervenant dans cette loi. On notera λ la conductivité thermique du sol, supposée constante.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$. Tout autre phénomène que la conduction thermique est négligé. On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} ,$$

où ρ et c désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du sol. Ces deux paramètres sont supposés constants.

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur en régime sinuoïdal permanent. À cet effet, on introduit la variable complexe $\underline{\theta}(z,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, avec $\mathrm{j}^2 = -1$ et $f(z)$ une fonction de z. L'inconnue $\theta(z,t)$ est alors donnée par $\theta(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{\theta}(z,t))$ où Re désigne la partie réelle.

3 - Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$. On fera intervenir la diffusivité thermique du sol donnée par $D = \lambda/\rho c$.

4 - Exprimer la solution générale de cette équation, en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B. Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces constantes est nulle.

5 - Montrer que $\underline{\theta}(z,t)$ se met sous la forme

$$\underline{\theta}(z,t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - z/\delta)} ,$$

où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω et D.

6 - Exprimer $T(z,t)$ à l'aide des paramètres T_0, δ, α, ω et des variables z et t. Interpréter physiquement l'expression obtenue. Interpréter physiquement le paramètre δ.

7 - Exprimer la profondeur L_{10} pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol.

8 - On donne pour un sol humide $D = 0{,}25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Calculer numériquement L_{10} dans le cas de la variation quotidienne de température, puis dans celui de la variation annuelle de température. À quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir la canalisation de l'installation géothermique ?

9 - Calculer littéralement puis numériquement le décalage temporel Δt entre $T(z = L_{10}, t)$ et $T(0,t)$ dans les deux cas de la question précédente.

10 - Le modèle développé vous paraît-il pertinent ? Quels phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir ? Répondre succinctement.

Problème ouvert

> *Pour aborder un exercice de type résolution de problème, il peut notamment être utile de faire un schéma modèle, d'identifier et nommer les grandeurs pertinentes, d'utiliser l'analyse dimensionnelle, de proposer des hypothèses simplificatrices, de décomposer le problème en des sous-problèmes simples, etc. Le candidat peut également être amené à proposer des valeurs numériques raisonnables pour les grandeurs manquantes ... et toutes les valeurs données ne sont pas forcément utiles. Le tout est évidemment à adapter à la situation proposée !*

Exercice 12 : Combinaison de plongée [oral CCP PSI | 3 | 2]

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35 °C.

1 - Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17 °C.

2 - Quelle doit être l'épaisseur d'une combinaison de plongée en néoprène pour éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue ?

Données :

- ▷ capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3{,}5\,\mathrm{kJ} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$;
- ▷ résistance thermique de la peau : $R_{\text{peau}} = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$;
- ▷ conductivité thermique du néoprène : $\lambda_{\text{néo}} = 0{,}2\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$;
- ▷ puissance produite par le métabolisme : $P_{\text{corps}} = 100\,\mathrm{W}$;
- ▷ puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) : $P_{\text{conv}} = \alpha(T_{\text{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.