

Transformations infinitésimales en thermodynamique

Exercice 1 : Chauffage isobare d'un gaz parfait

💡 1 | ✂ 1



▷ *Transitoire thermique.*

1 Appliquons le premier principe au gaz entre les instants t et $t + dt$. La transformation est isobare avec $p = p_0$ (p pression du gaz) grâce au piston libre de coulisser. Le bilan d'enthalpie s'écrit

$$\frac{dH}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} RI^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_P \frac{dT}{dt}.$$

d'où on déduit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RI^2}{C_P}$$

et en utilisant l'expression de $R(T)$ on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R_0 I^2}{C_P T_0} T = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_P T_0}{R_0 I^2}.$$

Cette équation s'intègre en

$$T(t) = A e^{+t/\tau},$$

et à l'instant initial

$$T(0) \underset{\substack{\text{CI}}}{=} T_0 \underset{\substack{\text{sol}}}{=} A$$

d'où on déduit finalement

$$T(t) = T_0 e^{+t/\tau}.$$

Si on écrit l'équation différentielle sous forme canonique, on constate que les deux préfacteurs sont de signe différents : le système est instable (cf. chapitre sur les systèmes linéaires), il est donc logique de trouver une solution divergente.

2 On en déduit

$$V(t) = \frac{nRT(t)}{p_0} = \frac{nRT_0}{p_0} e^{+t/\tau} \quad \text{soit} \quad V(t) = V_0 e^{+t/\tau}.$$

Exercice 2 : Chauffage par une pompe à chaleur

💡 2 | ✂ 2



▷ *Transitoire thermique;*
▷ *Machine thermique.*

1 Comme la PAC fonctionne en régime permanent, alors l'énergie totale du fluide caloporteur est constante. Le bilan d'énergie interne du fluide caloporteur s'écrit donc

$$dU \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_f dt + \mathcal{P}_c dt + \mathcal{P}_m dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_m = 0. \quad (1)$$

Par ailleurs, comme le fluide évolue de manière réversible, il n'y a pas de création d'entropie. Le bilan d'entropie s'écrit donc

$$dS \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2nd P}}}{=} \frac{\mathcal{P}_c dt}{T_c} + \frac{\mathcal{P}_f dt}{T_f} + \delta \mathcal{S}_c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathcal{P}_c}{T_c} + \frac{\mathcal{P}_f}{T_f} = 0. \quad (2)$$

2 Au cours d'une évolution infinitésimale, l'intérieur de la maison reçoit de la part du fluide caloporteur le transfert thermique infinitésimal $\delta Q = -\mathcal{P}_c dt$. Le bilan d'énergie interne de l'intérieur de la maison s'écrit donc

$$dU \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\mathcal{P}_c dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C dT_c, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT_c}{dt} = -\frac{\mathcal{P}_c}{C}}. \quad (3)$$

3 D'après la relation (2),

$$\mathcal{P}_f = -\frac{T_f}{T_c} \mathcal{P}_c,$$

donc en injectant dans la relation (1)

$$\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_m = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_c = -\frac{\mathcal{P}_m}{C(1 - T_f/T_c)}$$

ce qui conduit avec la relation (3) au résultat attendu,

$$\boxed{\left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \frac{dT_c}{dt} = \frac{\mathcal{P}_m}{C}}.$$

4 Par séparation des variables,

$$dT_c - T_f \frac{dT_c}{T_c} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} dt \quad \text{soit} \quad \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} dT_c - T_f \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} \frac{dT_c}{T_c} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} \int_0^\tau dt$$

ce qui donne en procédant aux intégrations

$$\Delta T - T_f \ln \frac{T_0 + \Delta T}{T_0} = \frac{\mathcal{P}_m}{C} \tau$$

et ainsi

$$\boxed{\tau = \frac{C}{\mathcal{P}_m} \left[\Delta T - T_f \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \right]}.$$

Exercice 3 : Canon à neige

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓞ



- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Changement d'état.

1 La goutte d'eau est un système fermé, en transformation monobare avec équilibre mécanique, qui n'échange d'énergie que par transfert thermique.

Bilan d'enthalpie entre t et $t + dt$:

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} m_0 c dT \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\phi dt = -h(T - T_a) S dt.$$

| Il y a un signe car ϕ est une puissance cédée.

La goutte étant sphérique de rayon R constant, on en déduit

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \mu c dT = -h(T - T_a) \times 4\pi R^2 dt$$

et finalement

$$\boxed{\mu c R \frac{dT}{dt} = -3h(T - T_a)}.$$

2 Cette relation se réécrit

$$\frac{dT}{dt} + \frac{3h}{\mu c R} T = \frac{3h}{\mu c R} T_a,$$

où on identifie le temps caractéristique

$$\boxed{\tau = \frac{\mu c R}{3h}}.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent

$$T = T_a + A e^{-t/\tau}.$$

As-tu bien pensé à la solution particulière $T = T_a$? Pour la retrouver : le second membre est constant, donc la solution particulière T_{part} aussi, et on la trouve directement sur l'équation différentielle :

$$0 + \frac{T_{part}}{\tau} = \frac{T_a}{\tau}.$$

La condition initiale donne

$$T(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} T_a + A \quad \text{donc} \quad A = T_0 - T_a.$$

Finalement,

$$T = T_a + (T_0 - T_a) e^{-t/\tau}$$

ce qui se met bien sous la forme cherchée,

$$\boxed{\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-t/\tau}.$$

À l'instant t_1 ,

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{donc} \quad t_1 = -\tau \ln \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_1 = \tau \ln \frac{T_0 - T_a}{T_1 - T_a} = 4,0 \text{ s}.$$

3 La transformation est cette fois supposée instantanée et implique des changements macroscopiques. Elle est supposée sans travail, adiabatique et monobare donc d'après le premier principe

$$\Delta H = 0.$$

L'eau est partiellement solidifiée, on en déduit donc que la température finale est égale à la température de co-existence $T_{\text{fus}} = 0^\circ\text{C}$. Il y a donc simultanément solidification et échauffement de l'eau. On raisonne donc sur la transformation auxiliaire, fictive, suivante, dans laquelle les deux phénomènes ont lieu successivement :

▷ dans une première étape, toute l'eau passe de T_1 à T_{fus} ;

▷ dans une deuxième étape, une masse $(1-x)m$ se solidifie, ce qui laisse bien une fraction massique x de liquide.

Le bilan enthalpique s'écrit

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = mc(T_{\text{fus}} - T_1) + (1-x)m(-\ell_{\text{fus}}).$$

| L'enthalpie de fusion est l'opposée de l'enthalpie de solidification.

Par identification des deux expressions de ΔH , on en déduit

$$(x-1)\ell_{\text{fus}} = -c(T_{\text{fus}} - T_1)$$

et ainsi

$$\boxed{x = 1 - \frac{c(T_{\text{fus}} - T_1)}{\ell_{\text{fus}}} = 0,94.$$

4 Procédons au bilan enthalpique d'une transformation infinitésimale de durée dt au cours de laquelle une masse dm solidifie à température $T = T_{\text{fus}}$ constante. Le bilan enthalpique devient

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solidification}}}{=} -dm \ell_{\text{fus}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{=} -h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2 dt.$$

ce que l'on peut réécrire

$$dm = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} dt$$

avant d'intégrer

$$\int_{(1-x)m}^m dm = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

soit

$$m - (1-x)m = \frac{h(T_{\text{fus}} - T_a) 4\pi R^2}{\ell_{\text{fus}}} (t_2 - t_1)$$

et on en déduit

$$\boxed{t_2 = t_1 + \frac{x R \ell_{\text{fus}} \mu}{3h(T_{\text{fus}} - T_a)} = 21 \text{ s}.$$

On peut bien sûr intégrer « comme d'habitude », avec une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions initiales ... mais attention, les conditions initiales de cette deuxième phase ne sont pas en $t = 0$ mais en $t = t_1$. Dans un tel cas, raisonner par séparation des variables est moins risqué sur la prise en compte des conditions initiales.

Exercice 4 : Démonstration de la loi de Laplace

💡 1 | ✂ 2 | 🔄



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Manipulation des différentielles.

1 Trois hypothèses : gaz parfait en transformation adiabatique et réversible. La loi de Laplace s'écrit

$$PV^\gamma = \text{cte}.$$

On combine ensuite avec l'équation d'état : d'une part,

$$\frac{nRT}{V} \times V^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte}' ,$$

et d'autre part

$$P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = \text{cte} \quad \text{d'où} \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}'' .$$

2 La variation d'énergie interne au cours de la transformation s'écrit

$$dU \underbrace{=}_{\text{Joule}} C_V dT \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} \delta W_p + 0$$

et en remplaçant

$$\frac{nR}{\gamma-1} dT = -P dV .$$

3 En prenant la différentielle de l'équation d'état,

$$V dP + P dV = nR dT .$$

On déduit alors de la question précédente

$$V dP + P dV = -(\gamma-1)P dV \quad \text{d'où} \quad V dP = -\gamma P dV .$$

4 La séparation des variables donne

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

et par intégration

$$\ln P = -\gamma \ln V + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln P + \gamma \ln V = \text{cte} \quad \text{et} \quad \ln(PV^\gamma) = \text{cte}$$

d'où on déduit la loi de Laplace,

$$PV^\gamma = \text{cte} .$$

Exercice 5 : Transformation polytropique

💡 2 | ✂ 3



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Identité thermodynamique ;
- ▷ Manipulation des différentielles.

Commençons par écrire l'équation d'état en fonction de r et v ,

$$P \frac{V}{m} = \frac{n}{m} RT \quad \text{soit} \quad P v = \frac{RT}{M} \quad \text{d'où} \quad P v = r T .$$

1 D'après l'identité thermodynamique,

$$T ds = du + P dv = c dT.$$

Or pour un gaz parfait

$$du = c_V dT \quad \text{et} \quad P = \frac{rT}{v}$$

d'où on déduit

$$c_V dT + \frac{rT}{v} dv = c dT$$

et ainsi

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} - r \frac{dv}{v} = 0.$$

2 La relation précédente s'écrit

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = r \frac{dv}{v},$$

donc en intégrant

$$(c - c_V) \ln T = r \ln v + \text{cte}$$

ce que l'on peut réécrire

$$\ln T - \frac{r}{c - c_V} \ln v = \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln \left(T \times v^{-r/(c-c_V)} \right) = \text{cte} \quad \text{donc} \quad \ln \left(\frac{Pv}{r} \times v^{-r/(c-c_V)} \right) = \text{cte}.$$

On en déduit donc que

$$Pv^{1-r/(c-c_V)} = \text{cte}$$

ce qui est bien de la forme demandée avec

$$k = 1 - \frac{r}{c - c_V} = \frac{c - c_V - r}{c - c_V} \quad \text{d'où} \quad k = \frac{c - c_P}{c - c_V}.$$

en utilisant la relation de Mayer sous forme massique.

3 La relation de la question 1 s'écrit

$$\frac{dT}{T} - \frac{r}{c - c_V} \frac{dv}{v} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dT}{T} + (k - 1) \frac{dv}{v} = 0.$$

Au cours de la transformation, le travail massique reçu dû aux forces de pression s'écrit

$$\delta w = -P dv = -rT \frac{dv}{v} \quad \text{d'où} \quad \delta w = \frac{r}{k - 1} dT.$$

4 On a

$$du \underset{\text{1er ppe}}{=} \delta w + \delta q \underset{\text{Joule}}{=} c_V dT = \frac{r}{\gamma - 1} dT$$

Ainsi,

$$\delta q = r \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1} \right) dT.$$

5 • **Isobare** : il faut $P = \text{cte}$, ce qui est possible si $k = 0$.

• **Isochore** : il faut $v = \text{cte}$, et d'après la relation polytropique

$$P^{1/k} v = \text{cte}.$$

On veut donc $1/k = 0$ ce qui est possible si $k \rightarrow \infty$.

• **Adiabatique** : il faut $\delta q = 0$, ce qui est possible si $k = \gamma$. La relation polytropique redonne alors comme prévu la loi de Laplace (adiabatique réversible d'un gaz parfait).

• **Isotherme** : d'après l'équation d'état, une isotherme se caractérise par $Pv = rT = \text{cte}$, ce qui est possible pour $k = 1$.

Exercice 6 : Transformation polytropique

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 3



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Manipulation des différentielles.

La première question est excessivement calculatoire à mon sens, et mériterait d'être bien plus guidée. Si vous tombez sur un exercice comme celui-ci ... reste à espérer que le deuxième soit plus abordable!

1 D'après l'identité thermodynamique,

$$dU = T dS - P dV .$$

D'après les lois de Joule (gaz parfait),

$$dU = C_V dT \quad \text{et} \quad dH = C_P dT .$$

Comme la transformation est réversible, on a de plus

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + 0 = a C_P \frac{dT}{T} ,$$

et ainsi,

$$C_V dT = a C_P dT - P dV .$$

En divisant par T et en utilisant l'équation d'état, on obtient

$$(C_V - a C_P) \frac{dT}{T} = -\frac{P}{T} dV = -nR \frac{dV}{V} \quad \text{soit} \quad (C_V - a C_P) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0 .$$

On peut alors séparer les deux membres et intégrer,

$$\ln T^{C_V - a C_P} = -\ln V^{nR} + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \ln (T^{C_V - a C_P} \times V^{nR}) = \text{cte}$$

d'où on déduit

$$T^{C_V - a C_P} V^{nR} = \text{cte} .$$

Or d'après l'équation d'état,

$$T = \frac{PV}{nR} ,$$

d'où, en insérant nR dans la constante,

$$P^{C_V - a C_P} V^{C_V - a C_P + nR} = \text{cte}$$

et en reconnaissant la relation de Mayer $C_P = C_V + nR$ il vient

$$P^{C_V - a C_P} V^{(1-a)C_P} = \text{cte} .$$

En changeant à nouveau la constante, on arrive enfin à

$$PV^{\frac{(1-a)C_P}{C_V - a C_P}} = PV^{\frac{(1-a)\gamma}{1-a\gamma}} = \text{cte} ,$$

ce qui est bien de la forme demandée,

$$PV^k = \text{cte} \quad \text{avec} \quad k = \frac{(1-a)\gamma}{1-a\gamma} .$$

2 Pour une transformation isobare, $P = \text{cte}$ donc

$$k_{\text{isoP}} = 0 .$$

Une transformation isentropique réversible d'un gaz parfait est caractérisée par la loi de Laplace : on a alors

$$k_{\text{isoS}} = \gamma .$$

Enfin, une transformation isotherme se caractérise par

$$PV = nRT = \text{cte} \quad \text{soit} \quad k_{\text{isoT}} = 1 .$$