BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

Chapitre 16 – Thermodynamique *Version prof*

Conduction thermique

Plan du cours

Au programme

Extrait du programme officiel : partie 1 « Thermodynamique et mécanique des fluides », bloc 7 « Transfert d'énergie par conduction thermique ».

Le bloc 7 aborde l'étude de la conduction thermique dans les solides à l'aide de bilans infinitésimaux, la loi de Newton étant introduite pour faire le lien avec la thermodynamique industrielle. On se limite à l'étude de problèmes unidimensionnels.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité de flux thermique.	Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une interface.
Loi de Fourier.	Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan enthalpique.	Établir une relation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la chaleur sans terme source.	Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Lier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.

En **gras**, les points devant faire l'objet d'une approche expérimentale.

Ces cinq dernières années au concours

▷ Écrit : épreuves B 2016 et 2018.
▷ Oral : très souvent, c'est l'un des chapitres pour lesquels mon stock d'exercices est le plus fourni :)

> ***Remarque :*** *Le programme est ambigu sur ce qui est entendu par « problème unidimensionnel ». Dans la pratique, les épreuves écrites de ces dernières années se limitent à une dimension cartésienne, mais les épreuves orales abordent aussi des situations à une dimension cylindrique ou sphérique où le champ de température ne dépend spatialement que de la variable* r.

L'objectif de ce chapitre est de décrire les transferts thermiques par une approche mésoscopique. Cela permettra notamment de calculer la température dans des systèmes où elle n'est pas uniforme.

Rappel : on distingue trois modes de transfert thermique.

▷ **Conduction** au sein d'un solide ou d'un liquide immobile : les molécules du solide, globalement fixes, se communiquent de l'énergie de proche en proche par collisions.

> ***Exemple :***
> *Une habitation se refroidit par conduction thermique au travers des murs.*
>
> *Espace 1*

▷ **Convection** au sein d'un fluide en mouvement : le fluide se déplace au niveau macroscopique, reçoit de l'énergie dans les zones chaudes et en cède aux zones froides.

> ***Exemple :***
> *Principe du chauffage par des radiateurs.*
>
> *Espace 2*

▷ **Rayonnement** électromagnétique : un corps chaud brille, c'est-à-dire qu'il envoie de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques, qui est absorbée par les autres corps.

> ***Exemple :***
> *C'est évidemment par rayonnement que le Soleil réchauffe la Terre.*
>
> *Espace 3*

> ***Remarque :*** *Dans le cas du rayonnement, le transfert a lieu dans les deux sens (la Terre rayonne elle aussi de l'énergie vers le Soleil), mais globalement le solide chaud cède plus d'énergie que le froid.*

En règle générale, les trois modes de transfert thermique coexistent mais ils n'ont pas tous la même importance. En particulier, la convection est généralement prédominante sur les autres modes dès qu'elle est possible.

$\rightsquigarrow$ restriction à la conduction de thermique, c'est-à-dire sans mouvement de matière au sein du système, ce qui de fait exclut quasiment les fluides de l'étude.

I - Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

I.A - Équilibre thermodynamique local

- **Un exemple pour comprendre**

À l'échelle macroscopique, les grandeurs d'état intensives ne sont pas forcément homogènes : penser à la température d'une pièce en hiver, il fait plus chaud près du radiateur que près d'une fenêtre. Ainsi, le système « air de la pièce » est hors équilibre à l'échelle macroscopique, ses variables d'état intensives ne sont pas définies.

Par contre, des thermomètres placés à différents endroits de la pièce n'auront pas de mal à indiquer une température. Ainsi, si l'on isole par la pensée une petite zone (mésoscopique) autour du thermomètre, il est tout à fait possible définir sa température, et toutes ses autres variables d'état intensives.

$\rightsquigarrow$ ce volume mésoscopique est dans un état d'équilibre thermodynamique.

- **Formalisation**

> On appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique.

Les grandeurs d'état intensives sont alors décrites non plus à l'échelle macroscopique du système complet, mais par des champs dépendant du point considéré.

> ***Exemples :*** *champ de pression, champ de température, mais aussi pourquoi pas champ d'enthalpie massique ou d'entropie molaire.*

Intérêt : appliquer les principes de la thermodynamique à l'échelle mésoscopique en considérant le travail et la chaleur échangés par des systèmes mésoscopiques voisins.

$\rightsquigarrow$ dans toute la suite, on suppose l'équilibre thermodynamique local.

I.B - Vecteur densité de flux ou de courant thermique

On sait intuitivement que les transferts thermiques se font « du chaud vers le froid », et ont donc une direction.

$\rightsquigarrow$ raisonnable de la traduire à l'échelle mésoscopique par un vecteur $\vec{j}_{\text{th}}$, dont la norme est d'autant plus grande que le transfert thermique est important.

On appelle **vecteur densité de flux thermique** ou **densité de courant thermique** $\vec{j}_{\text{th}}$
le vecteur dont le flux au travers d'une surface orientée $\mathcal{S}$
est égal à la puissance thermique qui la traverse.

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\,.$$

Le vecteur densité de flux thermique s'exprime en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

Vocabulaire et notations :

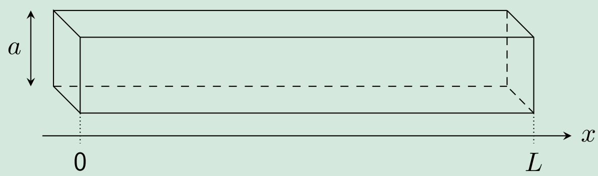
▷ on utilise indifférement le vocabulaire « puissance thermique » (notée $\mathcal{P}_{\text{th}}$) ou « flux thermique » (noté ϕ) ;
▷ le vocabulaire « densité de courant thermique » vient de l'analogie avec le vecteur « densité de courant électrique », cf. cours d'électromagnétisme ;
▷ notations alternatives : $\vec{j}_{\text{th}}$ est parfois noté $\vec{j}_Q$ ou simplement $\vec{j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

> ***Remarque 1 :*** *Le vecteur densité de flux thermique contient les contributions de chaque mode de transfert thermique,*
> $$\vec{j}_{\text{th}} = \vec{j}_{\text{conduction}} + \vec{j}_{\text{convection}} + \vec{j}_{\text{rayonnement}}\,.$$

> ***Remarque 2 :*** *En pratique, un calcul de flux thermique passe rarement par un calcul d'intégrale : les surfaces intéressantes au travers desquelles calculer le flux thermique ne sont pas choisies au hasard ! Il est très fréquent (systématique ?) de raisonner sur une surface où $||\vec{j}||$ est uniforme et $\vec{j}$ est partout colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Dans ce cas, l'intégrale se simplifie.*

Exercice C1 : Des flux thermiques dans tous les sens

On considère une barre à section carrée de côté a. On impose $T(x{=}0) > T(x{=}L)$, et le régime stationnaire est supposé atteint. On suppose la température uniforme dans toute section de la barre mais dépendant de x, $T = T(x)$.



1 - Justifier que $\vec{j}_{\text{th}} = j_x(x)\,\vec{e}_x$. Quel est le sens de $\vec{j}$? Le signe de j_x ?

2 - Prévoir le signe du flux thermique $\phi_{\text{e}}(x=0)$ entrant dans la barre par la face située en $x = 0$. L'exprimer en fonction de j_x.

3 - Mêmes questions pour le flux thermique sortant de la barre par cette même face $\phi_{\text{s}}(x{=}0)$.

4 - Mêmes questions pour le flux thermique entrant dans la barre par la face située en $x = L$.

5 - Mêmes questions pour le flux thermique sortant de la barre par cette même face.

6 - Comment les réponses aux questions précédentes sont elles modifiées si $T(x{=}0) < T(x{=}L)$?

Présenter les choses dans l'ordre : (1) analyse physique, (2) calcul, (3) cohérence du résultat.

1 Température uniforme selon y et z, donc pas de transfert thermique dans ces directions : $\vec{j} = j_x\,\vec{e}_x$. Comme T dépend de x, $\vec{j}$ peut a priori en dépendre aussi (en fait non mais on ne peut pas le savoir dès maintenant).
Vecteur $\vec{j}$ dirigé du chaud vers le froid, donc selon $+\vec{e}_x$, c'est-à-dire $j_x > 0$.

2 La barre reçoit effectivement un transfert thermique par la face située en $x = 0$, donc $\phi_{\text{e}}(x{=}0) > 0$. Le vecteur normal unitaire entrant dans la barre en $x = 0$ est $+\vec{e}_x$ donc

$$\phi_{\text{e}}(x{=}0) = \iint_{\text{face}} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint j_x(x{=}0)\,\vec{e}_x \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_x = j_x(x{=}0)a^2\,.$$

3 La barre reçoit effectivement un transfert thermique, donc $\phi_{\text{s}}(x{=}0) < 0$. Le calcul est identique au précédent, au signe du vecteur normal unitaire près, d'où

$$\phi_\mathrm{s}(x=0) = -j_x(x=0)a^2\,.$$

$\boxed{4}$ Par la face située en $x = L$ la barre cède effectivement un transfert thermique, donc $\phi_\mathrm{e}(x=L) < 0$. Comme j_x est uniforme sur la section considérée et que $\vec{n}_\mathrm{e} = -\vec{e}_x$,

$$\phi_\mathrm{e}(x=L) = -j_x(x=L)a^2\,.$$

$\boxed{5}$ $\phi_\mathrm{s}(x=L) = +j_x(x=L)a^2$

$\boxed{6}$ Tous les transferts thermiques changent de sens, donc le sens réel de $\vec{j}$ aussi, donc le signe de j_x est modifié. En revanche, les expressions obtenues en fonction de j_x ne viennent que de définitions géométriques : elles sont inchangées !

Espace 4

Les expressions des flux en fonction des composantes du vecteur densité de flux thermique ne dépendent pas de son sens réel, il n'y a donc pas lieu d'y ajouter des signes à la main. L'éventuel signe ne dépend que du sens du vecteur normal $\vec{n}$.

⇝ Reste à relier ce $\vec{j}_\mathrm{th}$ à ce qui nous intéresse vraiment : les inhomogénéités de température.

I.C - Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier

La loi de Fourier est une loi phénoménologique, proposée par Joseph Fourier en 1807. Elle est valable dans un milieu homogène et isotrope.

Loi de Fourier :

Le vecteur densité de flux thermique par conduction est opposé au gradient de température,

$$\vec{j}_\mathrm{cond} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T\,,$$

où λ est une caractéristique du matériau appelée **conductivité thermique** qui s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

Analyse qualitative :

▷ Sens :

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$ dirigé dans la direction où la température augmente le plus, il est donc logique que $\vec{j}$ soit de sens opposé.

Espace 5

▷ Norme :

plus les écarts de température sont grands, pour le gradient sera élevé, plus les transferts thermiques seront intenses : cohérent.

Espace 6

Ordres de grandeur : retenir $\lambda \sim 10^2\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour un bon conducteur thermique et $\lambda \sim 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ pour un isolant.

Matériau	Conductivité λ ($\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$)	Diffusivité D ($\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$)
Cuivre	$4\cdot10^2$	$1\cdot10^{-4}$
Zinc	$1\cdot10^2$	$4\cdot10^{-5}$
Béton	1	$5\cdot10^{-7}$
Verre	0,9	$5\cdot10^{-7}$
Humus	0,5	$1\cdot10^{-7}$
Laine de verre	$5\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-7}$
Polystyrène expansé	$4\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-6}$
Eau (*)	0,6	$1\cdot10^{-7}$
Air (*)	$3\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-5}$

(*) La conductivité thermique décrit uniquement les transferts thermiques par conduction, qui sont très souvent dominés par la convection dans les fluides. Ces valeurs sont donc à utiliser avec précaution, uniquement dans le cas où il n'y a pas de mouvement au sein du fluide.

Les conductivités thermiques dépendent faiblement de la température : à notre niveau, cette dépendance sera considérée comme négligeable.

I.D - Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Les échanges thermiques au sein d'un matériau sont pilotés par les conditions aux limites imposées aux interfaces entre ledit matériau et son environnement.

- **Quelles sont les grandeurs continues ?**

Idée de physique : Il ne peut pas y avoir d'accumulation d'énergie à l'interface. Toute l'énergie qui « entre » d'un côté de l'interface doit forcément « ressortir » instantanément de l'autre côté.

La température n'est pas nécessairement continue à une interface,
mais le vecteur densité de flux est toujours continu.

Espace 7

Lorsque la température est continue,
les deux milieux sont dits **en contact thermique parfait**.

Exemple : dans un cas 1d cartésien pour une interface en x_0,

$$\vec{j}\,(x_0^-) = \vec{j}\,(x_0^+) \qquad \text{mais a priori} \qquad T(x_0^-) \neq T(x_0^+)\,.$$

- **Interface entre deux solides**

Exemple : cas 1d cartésien, deux matériaux notés 1 et 2.

$$\vec{j}(x_0^-) = \vec{j}(x_0^+) \qquad \text{donc} \qquad -\lambda_1 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x_0^-)\,\vec{e}_x = -\lambda_2 \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x_0^+)\,\vec{e}_x$$

Espace 8

⇝ la condition limite porte sur les dérivées spatiales de la température.

- **Interface solide-fluide : loi de Newton**

Considérons le cas où un fluide de température T_{flu} qui circule autour d'un solide de température $T_{\text{sol}} \neq T_{\text{flu}}$. Comme le fluide est en mouvement, les deux phénomènes de conduction et convection contribuent aux échanges d'énergie : ces échanges sont qualifiés de **conducto-convectif**.

> ***Remarque :*** *À cause de sa viscosité, la vitesse du fluide est nulle au contact du solide, c'est donc la conduction qui est majoritaire au niveau du contact, et son importance décroît rapidement avec la distance. Utiliser la loi de Newton revient à négliger l'épaisseur de cette couche limite conducto-convective devant les autres dimensions caractéristiques du système.*

Loi de Newton :

Le flux thermique reçu par le solide de la part du fluide
est proportionnel à l'écart de température entre eux et à la surface d'échange,

$$\mathcal{P}_{\text{flu}\to\text{sol}} = \phi_{\text{flu}\to\text{sol}} = hS(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})\,.$$

À l'échelle mésoscopique, cela se traduit par une densité de courant thermique

$$\vec{j} = h(T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})\,\vec{n}_{\text{flu}\to\text{sol}}\,.$$

Le coefficient h est appelé **coefficient conducto-convectif**.
Il s'agit d'un coefficient phénoménologique qui s'exprime en $\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

Ordres de grandeur : la valeur de h dépend de beaucoup de paramètres, en premier lieu la vitesse du fluide (cf. notion de température ressentie), mais aussi de l'état de surface du solide.

▷ avec la seule convection naturelle, $h \sim 10\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ dans un gaz et $h \sim 500\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$ dans un liquide ;
▷ si la convection est forcée (solide en mouvement ou écoulement imposé, par exemple par un ventilateur), il faut typiquement multiplier ces valeurs par 10 ;
▷ si le fluide change d'état au contact du solide (dans une machine thermique) les valeurs peuvent atteindre $10^5\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$.

Officiellement cette loi doit toujours être fournie par un énoncé. Le seul risque est de se tromper sur le signe de la différence de température : pour s'en assurer il suffit de contrôler que les échanges d'énergie se font du chaud vers le froid.

- **Paroi calorifugée**

Par définition, il n'y a pas de transfert thermique au travers d'une paroi calorifugée. Ainsi en tout point de la paroi, le flux thermique au travers de la paroi est nul.

⇝ on en déduit que $\vec{j}_{\text{th}}$ doit être tangent à la paroi ... mais pas forcément nul : il peut y avoir un transfert thermique le long de la paroi.

II - Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

On suppose dans ce paragraphe que le régime stationnaire est atteint : la température en tout point du système considéré est indépendante du temps.

Les résultats établis ici sont généralisables au cas des **régimes lentement variables** ou **régimes quasi-stationnaires** (ARQS thermique), qui se définissent en comparant le temps caractéristique de variation des conditions aux limites au temps caractéristique de diffusion qui sera défini dans la dernière partie du cours.

II.A - Conservation du flux thermique

Considérons un solide quelconque, qui n'échange d'énergie avec son environnement que par transfert thermique : il reçoit un flux entrant ϕ_e et cède un flux sortant ϕ_s (à deux endroits différents, sans quoi cela n'aurait pas de sens). On suppose qu'il n'y a pas de production de chaleur interne au système.

Bilan d'enthalpie entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \phi_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t - \phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stat}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \phi_\mathrm{e} = \phi_\mathrm{s}$$

Espace 9

En régime stationnaire et en l'absence de production de chaleur interne,
le flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant de n'importe quel système.

On dit qu'il y a **conservation du flux thermique** ou que le flux thermique est **conservatif**.

En pratique : la conservation du flux s'utilise généralement pour exprimer l'égalité du flux au travers de deux surfaces analogues, par exemple deux plans en coordonnées cartésiennes ou deux cylindres de rayons différents en coordonnées cylindriques.

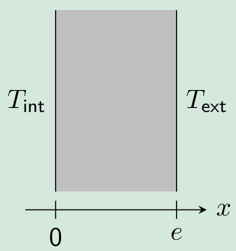
II.B - Profil de température en régime stationnaire

Méthode :

❶ Exprimer le flux thermique ϕ et le relier à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
❷ Intégrer la relation obtenue, souvent par séparation des variables ;
❸ Remplacer la constante impliquant ϕ et λ à l'aide d'une condition aux limites.

- **Exemple en géométrie unidimensionnelle cartésienne**

Exercice C2 : Profil de température dans un mur



On considère le mur de maison d'épaisseur e et de section S schématisé ci-contre.

1 - Déterminer la direction et les variables dont dépend $\overrightarrow{j}$.

2 - Déterminer le profil de température à l'intérieur du mur, en supposant un contact thermique parfait avec l'air environnant.

$\boxed{1}$ Invariance par translation selon y et z (effets de bords négligés) donc $T = T(x)$ et d'après Fourier $\overrightarrow{j} = j_x(x)\overrightarrow{e}_x$.

$\boxed{2}$ Expression du flux puis intégration :

$$\phi = j_x S = -\lambda S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{\phi}{\lambda S}\int_0^x \mathrm{d}x = \int_{T_\text{int}}^{T(x)}$$

et ainsi

$$T(x) = T_\text{int} - \frac{\phi}{\lambda S} x$$

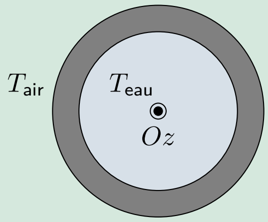
Attention à ne pas croire qu'on a fini ! Le flux est constant mais inconnu, il faut utiliser l'autre condition limite pour éliminer ϕ :

$$T(e) \underset{\underset{\text{CL}}{\uparrow}}{=} T_{\text{ext}} \underset{\underset{\text{expr}}{\uparrow}}{=} T_{\text{int}} - \frac{\phi}{\lambda S} e \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\phi}{\lambda S} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e}\,.$$

Espace 10

- **Exemple en géométrie unidimensionnelle cylindrique**

Exercice C3 : Profil de température dans une conduite en régime stationnaire



On s'intéresse à un tuyau de chauffage en cuivre de longueur totale L, de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2. Déterminer l'expression de $T(r)$ en supposant la continuité de la température en R_1 et R_2.

Flux au travers d'un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$

$$\phi = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r L \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{\phi}{2\pi\lambda L} \int_{R_1}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_{T_{\text{eau}}}^{T(r)} \mathrm{d}T$$

et ainsi

$$T(r) = T_{\text{eau}} - \frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{R_1}$$

Attention ! Le flux est constant, mais inconnu : il faut utiliser l'autre CL

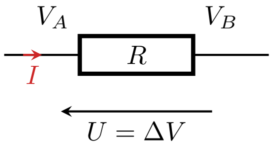
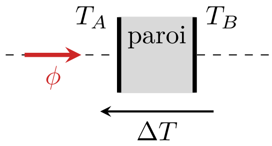
$$T(r = R_2) \underset{\underset{\text{CL}}{\uparrow}}{=} T_{\text{air}} \underset{\underset{\text{expr}}{\uparrow}}{=} T_{\text{eau}} - \frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\phi}{2\pi\lambda L} = -\frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}}{\ln(R_2/R_1)}$$

et enfin

$$T(r) = T_{\text{eau}} + \frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1}$$

Espace 11

II.C - Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

Conduction électrique	Conduction thermique
	
Intensité électrique $I = \iint_S \vec{j}_{\text{élec}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	Flux thermique $\phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Loi des nœuds $I_\text{e} = I_\text{s} = I$	Conservation du flux $\phi_\text{e} = \phi_\text{s} = \phi$
Tension = différence de potentiel $U = \Delta V = V_A - V_B$	Différence de température $\Delta T = T_A - T_B$
Loi d'Ohm locale (mésoscopique) $\vec{j}_{\text{élec}} = \gamma \vec{E} = -\gamma \,\overrightarrow{\text{grad}}\, V$	Loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \,\overrightarrow{\text{grad}}\, T$
Loi d'Ohm globale (macroscopique) $U = RI$ (convention récepteur)	Résistance thermique $\Delta T = R_\text{th}\,\phi$ (convention récepteur)

Par analogie avec la loi d'Ohm, on définit la **résistance thermique** par

$$R_\text{th} = \frac{\Delta T}{\phi}\,.$$

On appelle **conductance thermique**

$$G_\text{th} = \frac{1}{R_\text{th}} = \frac{\phi}{\Delta T}$$

La résistance thermique s'exprime en $\mathrm{K \cdot W^{-1}}$, la conductance thermique en $\mathrm{W \cdot K^{-1}}$.
Elles sont toujours positives.

Attention ! Le flux et la différence de température doivent être orientés en convention récepteur.

> ***Remarque :*** *La résistance thermique n'est définie qu'en régime stationnaire, sinon ϕ n'est pas constant dans la paroi et la définition n'a plus de sens.*

Interprétation : À différence de température fixé, le flux thermique (donc les transferts thermiques) sont d'autant plus grands que R_th est faible.

- paroi diatherme : R_th faible, G_th élevée
- paroi calorifugée : R_th à la limite infinie

II.D - Calcul des résistances thermiques

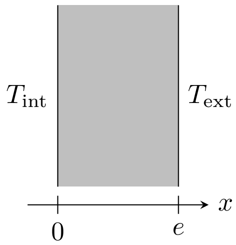
Méthode :

1. Exprimer le flux thermique ϕ et le relier à la dérivée de la température grâce à la loi de Fourier ;
2. Intégrer la relation obtenue entre les deux extrémités du milieu, souvent par séparation des variables ;
3. Conclure en vérifiant la convention récepteur.

- **Résistance thermique en géométrie unidimensionnelle cartésienne (très important !)**

Exercice C4 : Résistance thermique d'un mur

Calculer la résistance thermique du mur étudié dans l'exercice de cours précédent. Ce mur a une épaisseur e, une surface S, et il est fait dans un matériau de conductivité thermique λ.



On exprime le flux au travers d'un plan d'abscisse x, indépendant de x par conservation duf lux. Dessiner ϕ sur le schéma.

$$\phi = j_x(x)S = -\lambda S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

$$-\frac{\phi}{\lambda S}\int_0^e \mathrm{d}x = \int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} \mathrm{d}T$$

$$-\frac{\phi}{\lambda S} e = T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}$$

$$T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = \frac{e}{\lambda S}\phi$$

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}}$$

On finit en vérifiant le signe de R_{th} (test de vraisemblance).

La résistance thermique d'une paroi plane d'épaisseur e et de section S
faite dans un matériau de conductivité thermique λ vaut

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

Elle caractérise le *système*, c'est-à-dire non seulement le matériau mais aussi de la géométrie.

Résultat à connaître par cœur et à utiliser directement ; démonstration à savoir refaire parfaitement.

Analyse qualitative du résultat :

▷ Dépendance en e :
plus la paroi est épaisse, plus elle est thermiquement isolante : cohérent

Espace 12

▷ Dépendance en λ :

les transferts thermiques sont d'autant plus importants que la conductivité thermique du matériau est élevée : cohérent

Espace 13

▷ Dépendance en S :

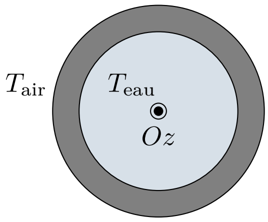
à matériau et épaisseur fixée, il y a d'autant plus de transferts thermiques que la surface d'échange est élevée : cohérent également

Espace 14

- **Résistance thermique en géométrie cylindrique**

Exercice C5 : Résistance thermique d'une conduite

Calculer la résistance thermique du tuyau de chauffage étudié dans l'exercice de cours précédent. Cette conduite est cylindrique de longueur L, de rayon interne et externe $R_1 < R_2$, faite dans un matériau de conductivité λ.



Flux sortant d'un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$, indépendant de r par conservation du flux. Dessiner sur le schéma

$$\phi = j_r(r) \times 2\pi r L = -2\pi r L \lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$$

$$-\frac{\phi}{2\pi\lambda L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_{T_{\text{eau}}}^{T_{\text{air}}}\mathrm{d}T$$

$$-\frac{\phi}{2\pi\lambda L}\ln\frac{R_2}{R_1} = T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}$$

$$T_{\text{eau}} - T_{\text{air}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}\phi$$

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}}$$

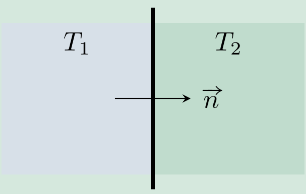
Conclure par les tests de vraisemblance : commenter le signe, la dépendance en R_2/R_1 (plus la conduite est épaisse, plus R_2/R_1 est grand), la dépendance en λ et celle en L.

Espace 15

- **Résistance thermique d'interface**

L'interface entre deux milieux créée à elle seule une résistance thermique, appelée résistance d'interface ou résistance de contact.

Exercice C6 : Résistance thermique de contact



Considérons l'interface entre deux milieux de températures respectives T_1 et T_2. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de Newton,

$$\vec{j} = h(T_1 - T_2)\vec{n}\,.$$

Calculer la résistance thermique d'une aire S de cette interface.

L'orientation de ϕ sur le schéma indique dans quel sens orienter la surface.

$$\phi = \iint \vec{j}\cdot\mathrm{d}S\vec{n} = h(T_1 - T_2)S$$

et il vient évidemment

$$\boxed{R_{\text{th,c}} = \frac{1}{hS}\,.}$$

Espace 16

> ***Remarque :*** *En toute rigueur, le contact thermique parfait se définit par $R_c = 0$, donc $h \to \infty$ ... et donc $T_1 = T_2$ sous peine d'avoir un flux, donc une puissance, infinie, ce qui est impossible.*

II.E - Association de résistances thermiques

L'analogie électrique laisse entendre qu'il existe des règles d'association des résistances thermiques analogues à celles rencontrées en électricité. La seule demi-difficulté consiste à définir clairement ce que veut dire « en série » ou « en parallèle » en thermique.

$$I \longleftrightarrow \phi \qquad\qquad \text{Montage en série} \longleftrightarrow \text{même intensité}$$

$$U \longleftrightarrow \Delta T \qquad\qquad \text{Montage en parallèle} \longleftrightarrow \text{même tension}$$

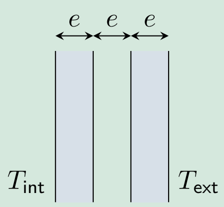
- **Résistances thermiques en série**

Deux résistances thermiques R_1 et R_2 sont dites **associées en série** lorsqu'elles sont traversées par le même flux thermique, mais soumises à des différences de température différentes.

En pratique, les matériaux sont alors superposés les uns sur les autres.

La résistance thermique équivalente est alors donnée par $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2$.

Exercice C7 : Double vitrage



Un double vitrage est constitué de deux vitres en verre séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e.

1 - Justifier qu'il s'agit d'une association en série.

2 - Calculer le rapport entre la résistance thermique du double vitrage et celle d'un simple vitrage de même épaisseur totale $3e$. Commenter.

3 - D'après ce modèle, comment pourrait-on améliorer simplement les performances thermiques du double vitrage ? Quel problème se pose en pratique ?

4 - Les normes de construction des bâtiments dits passifs ou à énergie positive recommandent l'usage du triple vitrage plutôt que du double, et ce pour une même épaisseur totale. Quel phénomène, négligé dans les questions précédentes, permet de l'expliquer ?

Données : conductivités thermiques de l'air $\lambda_a = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ et du verre $\lambda_v = 1\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Légender le schéma en ajoutant ϕ et en justifiant que le températures à l'interface air/verre n'ont aucune raison d'être égales à celles de la maison et du jardin.

5 L'énergie thermique doit forcément traverser les trois couches sans pouvoir les contourner, mais rien n'impose les températures.

6 Résistances thermiques :

$$R_{\text{sv}} = 3\frac{e}{\lambda_{\text{v}} S} \qquad \text{et} \qquad R_{\text{dv}} = 2\frac{e}{\lambda_{\text{v}} S} + \frac{e}{\lambda_{\text{a}} S}$$

Ratio :

$$\frac{R_{\text{dv}}}{R_{\text{sv}}} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_{\text{v}}}{3\lambda_{\text{a}}} \simeq 10$$

Double vitrage dix fois meilleur, et utilise moins de matériau.

7 Augmenter l'épaisseur de la couche d'air ... mais en fait on est vite limité par la convection dans l'air.

8 Augmenter les épaisseurs de verre ne sert à rien, on augmente le nombre de couches : les résistances de contact, ici négligées, comptent en fait beaucoup.

Espace 17

- **Résistances thermiques en parallèle**

Deux résistances thermiques R_1 et R_2 sont dites **associées en parallèle** lorsqu'elles sont soumises à la même différence de température, mais a priori traversées par des flux thermiques différents.

En pratique, les matériaux sont juxtaposés, c'est-à-dire installés côte à côte.

La résistance thermique équivalente est alors donnée par

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad G_{\text{éq}} = G_1 + G_2$$

Exercice C8 : Fenêtre dans un mur

Un mur en béton, de dimensions $5\,\mathrm{m} \times 3\,\mathrm{m}$, de résistance thermique $R_0 = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ est percé d'une fenêtre carrée de côté $20\,\mathrm{cm}$ en vitrage simple de résistance thermique $R = 8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$.

1 - Comment expliquer que la résistance thermique du mur soit plus faible que celle de la fenêtre, alors que le béton est un meilleur isolant thermique que le verre et que le mur est plus épais que la fenêtre ?

2 - Calculer la proportion de surface du mur occupée par la fenêtre.

3 - Calculer la résistance thermique totale. Quelle proportion des pertes thermiques est imputable à la fenêtre ?

4 Pour une paroi plane, $R_{\mathrm{th}} = e/\lambda S$: la surface du mur est beaucoup plus grande que celle de la fenêtre. On retrouve que la résistance thermique n'est pas caractéristique du matériau, mais du système = matériau + géométrie.
5 $S_{\mathrm{mur}} = 15\,\mathrm{m}^2$, $S_{\mathrm{fen}} = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$: la lucarne ne représente que 0,2 % de la surface du mur !
6 Approximation : lucarne de faible dimension donc on approxime $R_{\mathrm{mur}} = R_0$, d'où

$$\frac{1}{R_{\mathrm{tot}}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R} \qquad \text{soit} \qquad R_{\mathrm{tot}} = 1{,}6\cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{K}^{-1}.$$

$R_{\mathrm{tot}} < R_0$ donc la lucarne diminue les performances thermiques du mur d'environ 20 % ... d'où l'intérêt de changer ses fenêtre en rénovation énergétique !

Espace 18

III - Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

III.A - Équation de diffusion à une dimension cartésienne

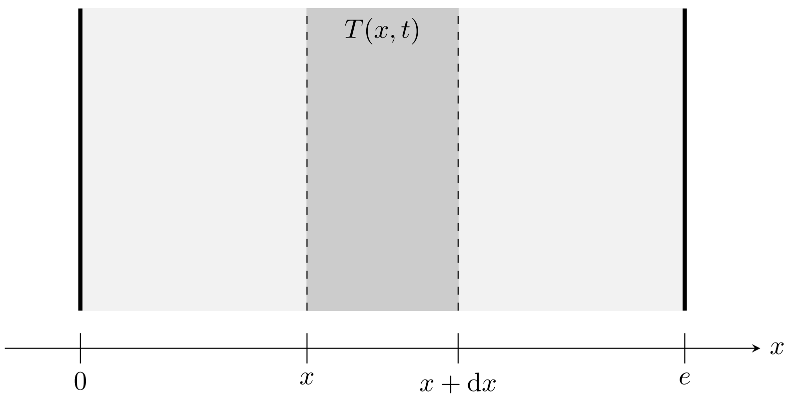
Considérons par exemple un mur plan d'épaisseur e dans la direction (Ox) et de grandes dimensions dans les directions y et z (section S). On suppose le problème unidimensionnel dépendant du temps, c'est-à-dire

$$T = T(x,t) \qquad \text{et} \qquad \vec{j} = j_x(x,t)\,\vec{e}_x\,.$$

⇝ *Objectif :* obtenir une équation aux dérivées partielles portant sur le champ de température.

⇝ *Méthode :* bilan d'enthalpie !

Espace 19



- **Système**

On cherche une équation impliquant les dérivées (partielles) spatiales.

⇝ raisonnement sur un système mésoscopique obligatoire. Comme T dépend de x seulement, on le prendra mésoscopique dans la direction x et macroscopique dans les autres directions.

Espace 20

Concrètement :

tranche mésoscopique de mur, comprise entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, et de mêmes dimensions que le mur dans les autres directions

Espace 21

- **Transformation**

On cherche une équation impliquant les dérivées (partielles) temporelles.

⇝ raisonnement sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$

Espace 22

- **Transfert thermique algébriquement reçu**

Le plus simple est d'orienter les flux dans le sens du repère spatial choisi, et de raisonner en termes de flux entrant ou sortant.

▷ par la face située en x :
flux entrant $\phi_\mathrm{e} = j_x(x)S$

Espace 23

▷ par la face située en $x + \mathrm{d}x$:
flux sortant $\phi_\mathrm{s} = j_x(x + \mathrm{d}x)S$

Espace 24

Transfert thermique total reçu au cours de la transformation :

$$\delta Q = \phi_\mathrm{e}\,\mathrm{d}t - \phi_\mathrm{s}\,\mathrm{d}t = [j_x(x,t) - j_x(x+\mathrm{d}x,t)]\,S\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,S\,\mathrm{d}t$$

Espace 25

> ***Remarque :*** *Beaucoup d'exercices consistent à adapter cette démonstration en faisant intervenir d'autres termes dans le transfert thermique reçu :*
> ▷ *fuites thermiques sur les parois latérales, qui ajoute un flux sortant supplémentaire ;*
> ▷ *production de chaleur interne au système, qui ajoute un flux « entrant » supplémentaire :*
> *effet Joule, réaction chimique, réaction nucléaire*
>
> *Espace 26*
>
> *Dans le dernier cas, on parle de* ***source thermique*** *ou* ***terme source****.*

- **Loi de Joule**

Implique la variation de température du système entre l'état initial (instant t) et l'état final (instant $t + \mathrm{d}t$). Or, la température du système méso est $T(x,t)$.

$$\mathrm{d}H = H(t+\mathrm{d}t) - H(t) = C\,[T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)] = \underbrace{\rho\,S\,\mathrm{d}x}_{\text{masse}}\,c\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Espace 27

> ***Remarque :*** *pourquoi la température du système est-elle $T(x,t)$ et pas, par exemple, $T(x+dx/2,t)$?*
> *Comme on ne travaille qu'au premier ordre en dx, c'est en fait équivalent pour exprimer la variation d'enthalpie : en effet,*
> $$T\left(x+\frac{dx}{2},t\right) \simeq T(x,t) + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{2}$$
> *donc*
> $$dH = \rho\, S\, dx\, c \times \frac{\partial}{\partial t}\big[T(x,t)\big] \times dt + \underbrace{\rho\, S\, dx\, c \times \frac{dx}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right] \times dt}_{\text{second ordre, donc négligé}}$$

- **Bilan d'enthalpie**

$$\mathrm{d}H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -\frac{\partial j_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\, S\, \mathrm{d}t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} \rho\, S\, \mathrm{d}x\, c\, \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\rho c\, \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\,.}$$

Espace 28

Loi de Fourier :

$$\vec{j} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T \qquad \text{soit} \qquad j_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\,.$$

Espace 29

Conclusion : $\boxed{\rho c\, \frac{\partial T}{\partial t} = +\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$

Espace 30

- **Forme canonique**

À une dimension cartésienne, l'équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

en posant $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$ la **diffusivité thermique** du milieu, qui s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$

> *Équation à connaître par cœur, démonstration à savoir refaire parfaitement.*

Unité de la diffusivité : équation aux dimensions associée à l'équation de diffusion.

$$[D] \times \frac{\Theta}{L^2} = \frac{\Theta}{T} \qquad \text{d'où} \qquad [D] = L^2\, T^{-1}\,.$$

Espace 31

> ***Remarque :*** *La diffusivité d'un matériau compare ses performances en conduction de la chaleur (via λ) et stockage (via c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.*

- **Situation analogue : diffusion cylindrique axiale**

La même démonstration s'applique pour un cylindre dont les parois latérales sont parfaitement calorifugées : en coordonnées cylindriques, la diffusion se fait seulement dans la direction axiale z,

$$\vec{j} = j_z(z,t)\,\vec{e}_z\,.$$

On procède alors de même en raisonnant sur une tranche mésoscopique de cylindre d'épaisseur $\mathrm{d}z$.

> ***Remarque :*** *sur la paroi calorifugée, $\vec{n} = \vec{e}_r$ donc on a bien comme attendu $\vec{j}\cdot\vec{n} = 0$.*

III.B - Généralisation à trois dimensions

On considère maintenant le cas général, où a priori $\vec{j}_{\rm th}$ a trois composantes non nulles qui dépendent des trois variables d'espace, mais on suppose qu'il n'y a pas de terme source.

- **Forme générale du premier principe**

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\vec{j}_{\rm th}$$

Cette équation est parfois appelée **équation de continuité**. Elle traduit, de façon très générale, le premier principe pour un système mésoscopique ne recevant pas de travai. Elle peut être utilisée dans n'importe quel système de coordonnées, à condition bien sûr de prendre la bonne expression de la divergence avec un formulaire.

- **Forme générale de l'équation de diffusion**

En introduisant la loi de Fourier dans la divergence,

$$\vec{j} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

donc en remplaçant dans la divergence on aboutit à

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Espace 32

On reconnaît dans le terme de droite le **laplacien** de la température ΔT, écrit en coordonnées cartésiennes.

> ***Remarque :*** *on retrouve en fait un résultat plus général et que vous devriez normalement connaître,*
>
> $$\Delta T = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T)\,.$$

Dans un milieu homogène et isotrope, en l'absence de terme source,
l'équation de diffusion prend la forme générale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$$

où $D = \lambda/\rho c$ est la diffusivité thermique du milieu.

- **Comparaison entre résistance thermique et diffusivité**

La diffusivité D et la résistance thermique R_{th} ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues. On rappelle que

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S} \text{ (paroi plane)} \qquad \text{et} \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}\,.$$

▷ Les deux dépendent de la conductivité thermique λ : un bon conducteur thermique sera caractérisé par une forte diffusivité et des faibles résistances thermiques.

▷ La résistance thermique dépend de la géométrie : doubler l'épaisseur d'un mur ne change pas la diffusivité mais double la résistance thermique.

▷ La diffusivité implique la capacité thermique massique c du matériau, c'est-à-dire sa capacité à stocker de l'énergie thermique, au contraire de la résistance thermique.

La résistance thermique quantifie la facilité des transferts thermiques au travers d'un système, et tient compte non seulement du matériau mais aussi de la géométrie.

La diffusivité thermique compare les propriétés de conduction et de stockage thermique. Elle est intrinsèque à un matériau, et indépendante d'un système en particulier.

III.C - Temps et distance caractéristiques de diffusion

- **Résolution numérique de l'équation de la chaleur**

> ***Exemple :*** *Considérons un exemple théorique mais simple : une plaque plane d'épaisseur 1 m, initialement à température uniforme $T_0 = 20\,°\text{C}$. Un échelon de température ΔT est imposé en $x = 0$ à l'instant initial. La température à l'autre extrémité est maintenue constante.*

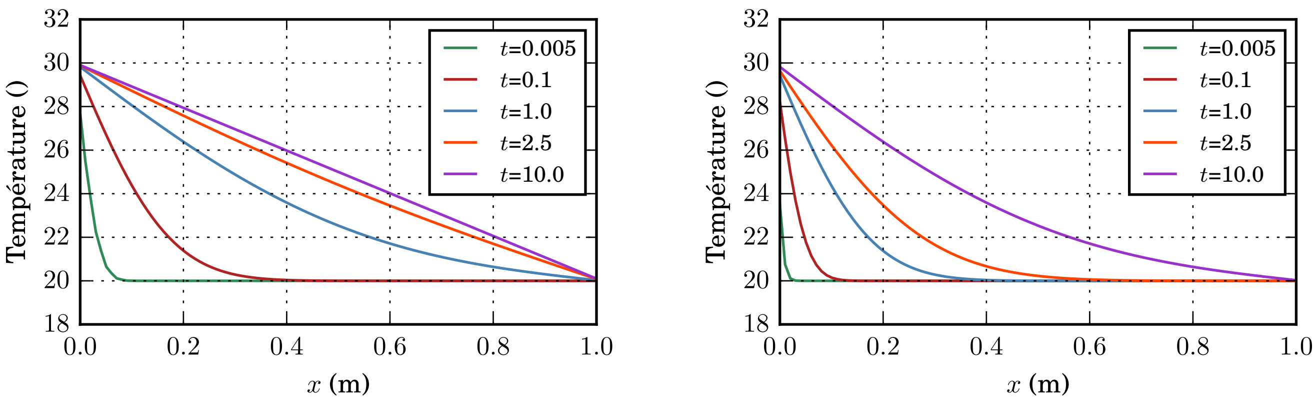


Figure 1 – Profil de température au sein d'une plaque plane à différents instants. Figure de gauche : $D = 0{,}1\,\text{m}^2/\,\text{min}$; figure de droite : $D = 0{,}01\,\text{m}^2/\,\text{min}$. Tous les autres paramètres sont identiques dans les deux simulations, en particulier $\Delta T = 10\,°\text{C}$. Les temps sont exprimés en minutes.

Observation : avancée progressive d'un front de diffusion jusqu'à atteindre en régime permanent un profil de température linéaire. Le régime permanent est atteint plus ou moins rapidement selon la valeur de D.

⇝ comment l'anticiper ?

La forme canonique d'une équation différentielle fait apparaître un certain nombre de paramètres caractéristiques, qui donnent déjà des informations sur le comportement du système avant même d'avoir résolu l'équation.

> ***Exemples :***
>
> ▷ *Circuit RC :* $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}u_C = \dfrac{E}{\tau}$
>
> ⇝ *τ renseigne sur la durée du régime transitoire.*
>
> *Espace 33*
>
> ▷ *Oscillateur masse ressort :* $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0$
>
> ⇝ *ω_0 est la pulsation des oscillations.*
>
> *Espace 34*

Ici le paramètre caractéristique est la diffusivité thermique D, mais son interprétation est un peu plus subtile car son unité n'est pas simple. On raisonne par analyse dimensionnelle.

- **Temps de diffusion**

▷ *Question :* quelle est la durée caractéristique τ d'établissement du régime permanent est-il établi dans la plaque ?

▷ *Paramètres :* e, D et ΔT

Espace 35

▷ *Postulat d'homogénéité :* si τ dépend de ces paramètres, alors il existes trois exposants α, β et γ permettant d'écrire une relation homogène

$$\tau = e^\alpha \, D^\beta \, \Delta T^\gamma \, .$$

▷ *Détermination des exposants :*

Équation aux dimensions associée :

$$T = L^\alpha \times L^{2\beta} \, T^{-\beta} \, \Theta^\gamma$$

Identification : $\beta = -1$, $\gamma = 0$ et $\alpha + 2\beta = 0$ donc $\alpha = 0$

Espace 36

▷ *Conclusion :*
$\tau = \frac{e^2}{D}$ indépendant de ΔT

Espace 37

▷ *Comparaison à la simulation :*

Calculer τ pour les deux valeurs de D + montrer en comparant deux simus que la valeur de ΔT ne joue aucun rôle

Espace 38

- **Longueur de diffusion**

▷ *Question :* sur quelle longueur ℓ le front de diffusion a-t-il avancé au bout d'une durée Δt ?

▷ *Paramètres :* $\Delta t, D$ (on admet que pas ΔT)

Espace 39

▷ *Postulat d'homogénéité :* si ℓ dépend de ces paramètres, alors il existes deux exposants α et β permettant d'écrire une relation homogène

$$\ell = \Delta t^\alpha \, D^\beta \, .$$

▷ *Détermination des exposants :*

Équation aux dimensions associée :

$$L = T^\alpha \times L^{2\beta} \, T^{-\beta}$$

Identification : $2\beta = 1$, et $\alpha - \beta = 0$ donc $\alpha = \beta = 1/2$

Espace 40

▷ *Conclusion :*
$\ell = \sqrt{D\,\Delta t}$

Espace 41

▷ *Comparaison à la simulation :*

le vérifier avec la simulation pour $D = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, on voit bien qu'il faut quadrupler le temps pour doubler l'avancée du front de diffusion.

Espace 42

- **Généralisation**

En ordre de grandeur, la diffusion thermique pendant une durée Δt a un effet sur une distance

$$\ell \sim \sqrt{D\,\Delta t}$$

et réciproquement pour que la diffusion thermique ait un effet sur une distance ℓ il faut attendre une durée

$$\Delta t \sim \frac{\ell^2}{D}$$

Ces résultats sont indépendants des températures mises en jeu.

Attention ! Ne pas confondre avec la propagation d'une onde pour laquelle on aurait $\Delta\ell = c\,\Delta t \propto \Delta t$.

⇝ numériquement, pour $D = 1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$ (valeur type métal)

$$\Delta t(1\,\mathrm{cm}) = 10\,\mathrm{s} \qquad \Delta t(2\,\mathrm{cm}) = 40\,\mathrm{s} \qquad \Delta t(3\,\mathrm{cm}) = 90\,\mathrm{s}$$