BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

DM 1 – à rendre lundi 7 septembre **Correction**

Mécanique

Trampoline

A - Le trampoline oscille

1 Voir figure 1.

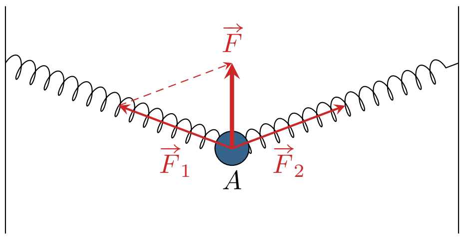

Figure 1 – Force exercée par le trampoline sur Anatole.

2 Les notations sont celles de la figure 2, on note $\vec{e}_x$ la direction d'allongement du ressort et on définit x tel que $\ell = \ell_0 + x$. La force élastique exercée par le ressort sur la masse qui y est attachée s'écrit

$$\vec{F}_\mathrm{r} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x\,.$$

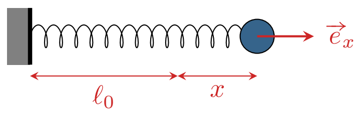

Figure 2 – Schéma du ressort considéré.

Au cours d'un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$, le travail élémentaire de $\vec{F}_\mathrm{r}$ vaut

$$\delta W_\mathrm{r} = \vec{F}_\mathrm{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -kx\,\mathrm{d}x\,.$$

Par définition, ce travail élémentaire s'identifie à l'opposé de la variation infinitésimale de l'énergie potentielle élastique au cours du déplacement,

$$\delta W_\mathrm{r} = -\mathrm{d}E_\mathrm{pe} = -kx\,\mathrm{d}x \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{pe}}{\mathrm{d}x} = kx \qquad \text{donc} \qquad E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + \mathrm{cte}\,.$$

En choisissant la constante nulle (pas d'énergie emmagasinée lorsque $\ell = \ell_0$) et en revenant à la définition de x, on obtient finalement

$$\boxed{E_\mathrm{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2\,.}$$

> *En fait, le plus général et naturel serait de raisonner en coordonnées sphériques dont le centre coïnciderait avec le point d'attache du ressort. On aurait alors*
>
> $$\delta W_\mathrm{r} = -k(r - \ell_0)\vec{e}_r \cdot (dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi) = -k(r - \ell_0)dr$$
>
> *ce qui conduit bien au bon résultat. Ceci dit, il est clair que l'usage des coordonnées sphériques est difficile de début de PT et hors de propos en PTSI !*

3 D'après le théorème de Pythagore, les deux ressorts ont même longueur

$$\ell = \sqrt{R^2 + z^2}\,.$$

L'énergie potentielle élastique totale vaut donc

$$\begin{aligned} E_{\text{pe}} &= 2 \times \frac{1}{2} k \left(\sqrt{R^2 + z^2} - \ell_0 \right)^2 \\ &= k \left(R^2 + z^2 - 2\ell_0 \sqrt{R^2 + z^2} + {\ell_0}^2 \right) \\ &= k \left(R^2 + z^2 - 2\alpha R \sqrt{R^2 \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)} + \alpha^2 R^2 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{pe}} = k \left((1+\alpha^2) R^2 + z^2 - 2\alpha R^2 \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} \right)}$$

4 En utilisant le développement limité donné,

$$\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{z^2}{2R^2} \,,$$

et ainsi

$$\begin{aligned} E_{\text{pe}} &= k \left((1+\alpha^2) R^2 + z^2 - 2\alpha R^2 - \cancel{2}\alpha \cancel{R^2} \frac{z^2}{\cancel{2R^2}} \right) \\ &= k \left((1 - 2\alpha + \alpha^2) R^2 + z^2 - \alpha z^2 \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{pe}} = k \left[(1-\alpha)^2 R^2 + (1-\alpha) z^2 \right]}$$

5 La force résultante $\overrightarrow{F}$ vaut

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{pe}}}{\mathrm{d}z} \overrightarrow{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{F} = -2k(1-\alpha) z \overrightarrow{e}_z \,.}$$

Pour un ressort vertical d'allongement z et de raideur k_{app}, on aurait

$$\overrightarrow{F} = -k_{\text{app}} z \overrightarrow{e}_z \,.$$

Comme $\alpha < 1$, on peut bien identifier

$$\boxed{k_{\text{app}} = 2(1-\alpha) k > 0 \,.}$$

On constate que si $z < 0$ alors $\overrightarrow{F}$ est dirigée selon $+\overrightarrow{e}_z$, ce qui est cohérent avec la figure 1.

> *Comme α est assez proche de 1, on a également k_{app} nettement inférieur à k, ce qui est conforme au comportement d'un trampoline : enfoncer le centre du trampoline est très simple, mais l'attacher à son support est autrement plus difficile.*

6 Étudions le mouvement d'Anatole dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à la force $\overrightarrow{F}$ et à son poids $-mg\overrightarrow{e}_z$. D'après le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{e}_z$,

$$\boxed{m\ddot{z} = -2k(1-\alpha) z - mg}$$

Cette équation s'écrit sous forme canonique

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{2k(1-\alpha)}{m}}_{={\omega_0}^2} z = -g$$

Une solution particulière de cette équation est

$$Z_0 = \frac{-mg}{2k(1-\alpha)}$$

et donc la forme générale de ses solutions est

$$\boxed{z(t) = Z_0 + A\cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}$$

avec A et B deux constantes dépendant des conditions initiales.

> *La solution particulière est celle qui décrit le régime permanent, donc ici les positions d'équilibre : comme test de vraisemblance, pensez à vérifier la cohérence physique de l'expression, ici $Z_0 < 0$ (Anatole s'enfonce), fonction croissante de m (plus il est lourd, plus il s'enfonce) et décroissante de k (plus le trampoline est raide, moins Anatole s'enfonce).*

B - Anatole décolle ?

7 Anatole étant *sur* le tapis du trampoline, la force $\overrightarrow{N}$ est forcément **verticale vers le haut** tout au long du mouvement, tant qu'Anatole se trouve sur le tapis.

8 On étudie de nouveau le mouvement d'Anatole dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à la force de contact $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e}_z$ et à son poids $-mg\overrightarrow{e}_z$. D'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\overrightarrow{e}_z$,

$$m\ddot{z} = N - mg\,.$$

En exprimant $\ddot{z}$ à partir de l'expression donnée dans l'énoncé,

$$+m\omega^2 Z_1\cos(\omega t) = N - mg$$

et ainsi

$$\boxed{N = mg + m\omega^2 Z_1\cos(\omega t)\,.}$$

9 La rupture de contact entre Anatole et le trampoline a lieu si et seulement si N s'annule. Comme $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$, l'annulation n'est possible que si

$$\boxed{\omega^2 Z_1 > g\,.}$$

Cette condition est d'autant plus facile à remplir que Z_1 est élevé, c'est-à-dire que les oscillations sont de **forte amplitude**, et ω est élevé, c'est-à-dire que les oscillations sont de **haute fréquence**. Ces deux résultats semblent qualitativement raisonnables : à la limite des faibles amplitudes et des basses fréquences, le trampoline ne bouge presque pas, et il est évident qu'Anatole ne peut pas décoller dans ces conditions.

C - Le grand saut !

10 Notons t_d l'instant du décollage, tel que

$$N(t_\mathrm{d}) = mg + m\omega^2 Z_1\cos(\omega t_\mathrm{d}) = 0\,.$$

Or juste avant le décollage ($t = t_\mathrm{d}^-$), Anatole est encore en contact avec le tapis, donc

$$z_\mathrm{d} = Z_0 - Z_1\cos(\omega t_\mathrm{d})\,.$$

De la première expression, on obtient

$$Z_1\cos(\omega t_\mathrm{d}) = -\frac{g}{\omega^2}$$

si bien que

$$\boxed{z_\mathrm{d} = Z_0 + \frac{g}{\omega^2}\,.}$$

11 Par définition,

$$v_\mathrm{d} = \dot{z}(t_\mathrm{d}) = +\omega Z_1\sin(\omega t_\mathrm{d}) = \omega Z_1\sqrt{1-\cos^2(\omega t_\mathrm{d})}\,,$$

et en réutilisant la question précédente

$$\boxed{v_\mathrm{d} = \omega Z_1\sqrt{1 - \frac{g^2}{{Z_1}^2\omega^4}}\,.}$$

12 Les frottements étant négligés, Anatole n'est soumis qu'à son poids, et son mouvement est donc conservatif. Son énergie mécanique conserve la même valeur au décollage et au sommet du saut, où la vitesse est nulle :

$$E_\mathrm{m} \underbrace{=}_{\text{décollage}} mgz_\mathrm{d} + \frac{1}{2}m{v_\mathrm{d}}^2 \underbrace{=}_{\text{sommet}} mgh + 0\,.$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
h &= z_\mathrm{d} + \frac{{v_\mathrm{d}}^2}{2g} \\
&= Z_0 + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 {Z_1}^2}{2g}\left(1 - \frac{g^2}{{Z_1}^2\omega^4}\right) \\
&= Z_0 + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 {Z_1}^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{h = Z_0 + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\omega^2 {Z_1}^2}{2g}\,.}
$$

> *La méthode est à retenir : lorsque que l'on cherche une position où la vitesse a un comportement particulier (ici, s'annule) ou réciproquement que l'on cherche la vitesse à un endroit donné, il est presque toujours plus efficace de raisonner énergétiquement si le mouvement est conservatif.*