DM 1 – à rendre lundi 7 septembre

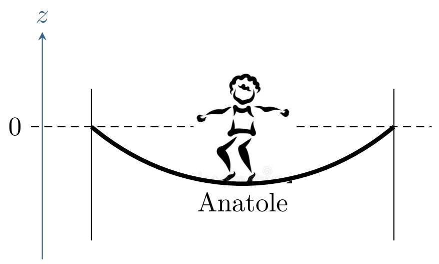
Mécanique

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail.

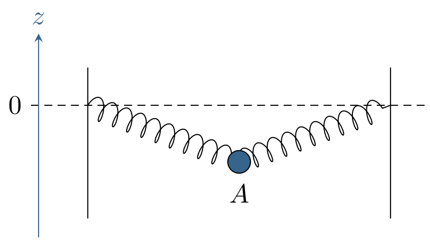
Flasher ce code pour accéder au corrigé

Trampoline



Pour s'occuper en attendant la rentrée, Anatole passe une bonne partie de ses journées à sauter sur le trampoline de son jardin. Entre deux acrobaties, il lui arrive parfois de décoller sans élan lorsqu'il fait simplement osciller le tapis du trampoline. Cet exercice a pour but d'étudier la (les) condition(s) permettant ce décollage et le saut qui s'en suit. Pour simplifier, on suppose qu'Anatole se trouve parfaitement au centre du trampoline et on le modélise par un point matériel A de masse m. On note z l'ordonnée du point A.

A - Le trampoline oscille



Le but de cette première partie est de déterminer l'équation horaire $z(t)$ lorsque Anatole oscille avec le tapis du trampoline. On modélise le trampoline par deux ressorts identiques, de même longueur à vide ℓ_0 et de même raideur k, attachés au point A. Le tapis de trampoline étant tendu, la longueur à vide des ressorts est légèrement inférieure au rayon du trampoline : on note $\ell_0 = \alpha R$ avec $\alpha \lesssim 1$.

1 - Reproduire la figure sur la copie. Représenter les deux forces exercées par les deux ressorts puis construire graphiquement leur résultante $\vec{F}$.

Pour exprimer la force $\vec{F}$ en fonction de z, il est calculatoirement beaucoup plus simple de raisonner en termes d'énergie potentielle plutôt que de projeter les forces représentées à la question précédente.

2 - Établir l'expression de l'énergie potentielle emmagasinée par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 en fonction de sa longueur instantanée ℓ. Petits rappels utiles :

- « établir » est synonyme de « démontrer » et donc différent de « balancer le résultat » ;
- toutes les notations que vous utilisez doivent être définies ;
- un schéma est une très bonne façon de définir des notations ;
- dans le cas probable où vous ne vous souviendriez plus bien de la démonstration, ce n'est pas grave, mais il vaut mieux aller la revoir dans votre cours de PTSI en adaptant si nécessaire les notations à celles de l'énoncé, plutôt que d'inventer un raisonnement semi-douteux, ou pire encore recopier ledit raisonnement semi-douteux sur la copie d'un copain.

3 - En déduire que l'énergie potentielle élastique *totale* du point A s'écrit

$$E_{\mathrm{pe}} = k\left[(1+\alpha^2)R^2 + z^2 - 2\alpha R^2\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}\right].$$

4 - On suppose que l'amplitude des oscillations verticales du tapis est faible devant le rayon du trampoline : $|z| \ll R$. En utilisant un développement limité de la forme $(1+\varepsilon)^q \simeq 1 + q\varepsilon$ pour $|\varepsilon| \ll 1$, en déduire une expression simplifiée de $E_{\mathrm{pe}}(z)$.

5 - Comme le raisonnement mené question 2 le laisse entendre, la force est reliée à la dérivée de l'énergie potentielle [1] : comme E_{pe} ne dépend que de z,

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{\text{pe}} = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{pe}}}{\mathrm{d}z}\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

Montrer que la force $\overrightarrow{F}$ est équivalente à celle d'un ressort vertical d'allongement z et de raideur apparente k_{app} à exprimer en fonction des données. Vérifier la cohérence de l'expression obtenue avec le schéma de la question 1, en particulier le sens de la force.

6 - Établir l'équation différentielle vérifiée par z et donner la forme générale de ses solutions, faisant intervenir des constantes reliées aux conditions initiales que l'on ne cherchera pas à calculer.

B - Anatole décolle ?

Le modèle précédent n'est pas complètement satisfaisant car il implique que le trampoline attire Anatole vers le bas dès que $z > 0$, ce qui est physiquement absurde. Il faut donc adopter une autre approche pour aller plus loin. Désormais, on ne modélise plus l'action du trampoline sur Anatole par des ressorts mais par une force de contact $\overrightarrow{N}$ inconnue a priori. Néanmoins, compte tenu de la partie précédente, on fait l'hypothèse que tant qu'Anatole est en contact avec le tapis, l'ordonnée z du point A est de la forme

$$z(t) = Z_0 - Z_1\cos(\omega t)\,.$$

Le signe « $-$ » signifie simplement qu'à l'instant initial le trampoline est à la position la plus basse de sa trajectoire.

7 - Quelle est la direction et le sens de $\overrightarrow{N}$? Varient-ils au cours du mouvement ?

8 - Par application du principe fondamental de la dynamique, établir l'expression de $N = ||\overrightarrow{N}||$.

9 - À quelle condition sur N Anatole décolle-t-il du trampoline ? En déduire une condition impliquant Z_1 et ω pour que le décollage puisse avoir lieu. Le décollage est-il favorisé pour les oscillations de faible ou forte amplitude ? de basse ou haute fréquence ? Cela vous semble-t-il qualitativement cohérent ?

C - Le grand saut !

On suppose pour la suite cette condition remplie : Anatole décolle bel et bien du trampoline.

10 - Déterminer l'ordonnée z_{d} d'Anatole lorsque le décollage a lieu.

11 - Montrer qu'Anatole a alors une vitesse

$$v_{\text{d}} = \omega Z_1\sqrt{1 - \frac{g^2}{{Z_1}^2\omega^4}}\,.$$

12 - En négligeant tout frottement, en déduire la hauteur h atteinte par Anatole au sommet du saut. Indication : il y a beaucoup plus simple que le PFD pour répondre à cette question !

1. L'opérateur gradient sera introduit dans les tous premiers cours de PT, l'expression l'utilisant est générale mais pas à retenir.