DM 1 – à rendre lundi 11 septembre *Correction*

Révisions sur les filtres

I - Passe-bas atténuateur

1 La tension de sortie s est mesurée aux bornes du condensateur et de la résistance R, qui sont montées en parallèle

• **Limite haute fréquence :** le condensateur équivaut à un fil, la tension s à ses bornes est donc nulle. Les signaux haute fréquence sont ainsi coupés par le filtre.

• **Limite basse fréquence :** le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, les deux résistances forment donc un pont diviseur de tension. Ainsi,

$$\frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, les signaux basse fréquence sont transmis par le filtre mais atténués d'un facteur 2, ce qui justifie le nom du montage.

2 L'association R, C parallèle a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{RC}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega = \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{R}\,.$$

On en déduit la fonction de transfert par un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{RC}}}{R+\underline{Z_{RC}}} = \frac{1}{1+R\underline{Y_{RC}}} = \frac{1}{2+\mathrm{j}RC\omega} = \frac{1/2}{1+\mathrm{j}\dfrac{RC}{2}\omega}$$

> *La marche à suivre est donnée par la forme canonique à laquelle on cherche à identifier la fonction de transfert. Ici, elle commence par « 1 + ... » au dénominateur : il faut donc diviser par ce qu'il faut, ici par 2, pour faire apparaître ce début d'expression..*

En identifiant avec la forme donnée par l'énoncé,

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \omega_\mathrm{c} = \frac{2}{RC}\,.}$$

3 • **Limite basse fréquence :**

$$\underline{H} \underset{\mathrm{BF}}{\sim} \frac{H_0}{1} = \frac{1}{2} \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB} \underset{\mathrm{BF}}{\sim} 20\log\frac{1}{2} = -6\,\mathrm{dB}\,,$$

ce qui correspond bien à la valeur lue sur le diagramme de Bode côté basse fréquence.

• **Limite haute fréquence :**

$$\underline{H} \underset{\mathrm{HF}}{\sim} \frac{H_0}{\mathrm{j}\omega/\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{d'où} \qquad G_\mathrm{dB} \underset{\mathrm{HF}}{\sim} 20\log\frac{H_0\omega_\mathrm{c}}{\omega} = -20\log\omega + 20\log(H_0\omega_\mathrm{c})\,,$$

ce qui donne une pente de -20 dB/décade, conforme à ce que l'on peut lire sur le diagramme de Bode côté haute fréquence : le gain passe approximativement de $-40\,\mathrm{dB}$ à 10^4 Hz à $-60\,\mathrm{dB}$ à 10^5 Hz.

4 On vérifie à partir des expressions précédentes que pour $\omega = \omega_\mathrm{c}$, alors

$$G_\mathrm{dB,BF} = G_\mathrm{dB,HF} = 20\log H_0\,,$$

ce qui signifie bien que les asymptotes se croisent (même ordonnée pour la même abscisse).

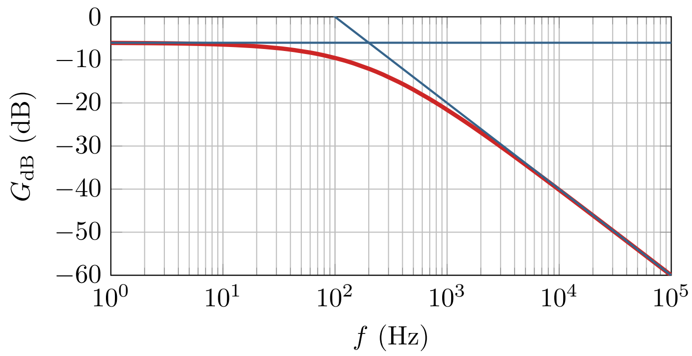

Figure 1 – Diagramme de Bode et asymptotes.

En traçant les asympotes sur le diagramme de Bode, cf. figure 1, on constate que les deux asymptotes se croisent pour $f = 200\,\mathrm{Hz}$, d'où on déduit la valeur de C via

$$\omega_\mathrm{c} = 2\pi f_\mathrm{c} = \frac{2}{RC} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{C = \frac{1}{\pi R f_\mathrm{c}} = 1{,}6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\,.}$$

5 Une atténuation d'un facteur 100 au moins signifie que $|H| < 1/100$, soit

$$G_\mathrm{dB} < 20\log\frac{1}{100} = -40\,\mathrm{dB}\,,$$

ce qui est conforme au diagramme de Bode pour $f > 10^4\,\mathrm{Hz}$.

Par le calcul, on cherche les pulsations ω telles que $|H| < 1/100$. En utilisant l'équivalent haute fréquence comme le suggère l'énoncé, on cherche ω tel que

$$\frac{H_0\omega_\mathrm{c}}{\omega} < \frac{1}{100} \qquad \text{soit} \qquad \omega > 100\,H_0\,\omega_\mathrm{c}\,.$$

En revenant aux fréquences, on en conclut que les fréquences atténuées de plus d'un facteur 100 sont les fréquences telles que

$$\boxed{f > 100\,H_0\,f_\mathrm{c} = 1\cdot 10^4\,\mathrm{Hz}\,.}$$

II - Filtre de Wien

oral banque PT

6 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, la tension à leurs bornes est donc nulle, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

7 Notons $\underline{Y}$ l'admittance de l'association parallèle de R et C,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\,.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\begin{aligned}
\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} &= \frac{\underline{Z}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \underline{Z}} \\
&= \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}} \\
&= \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)} \\
&= \frac{1}{1 + 1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega} + 1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}\,.}$$

8 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}x + \dfrac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

9 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}\,.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne **le gain maximal $G_{\mathrm{max}} = 1/3$, soit $G_{\mathrm{dB}} = 20\log(1/3) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$**. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0, la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

10 Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-\mathrm{j}Q/x} = \frac{\mathrm{j}H_0 x}{Q} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| \sim 20\log\dfrac{H_0 x}{Q} = 20\log x \\ \varphi = \arg\underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \sim 20 \log \dfrac{H_0}{Qx} = -20\log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente ±20 dB/décade passant par $G_{\mathrm{dB}} = 0$ pour $x = 1$**, alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm\pi/2$.** Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\mathrm{dB}} = -9{,}5\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 2.

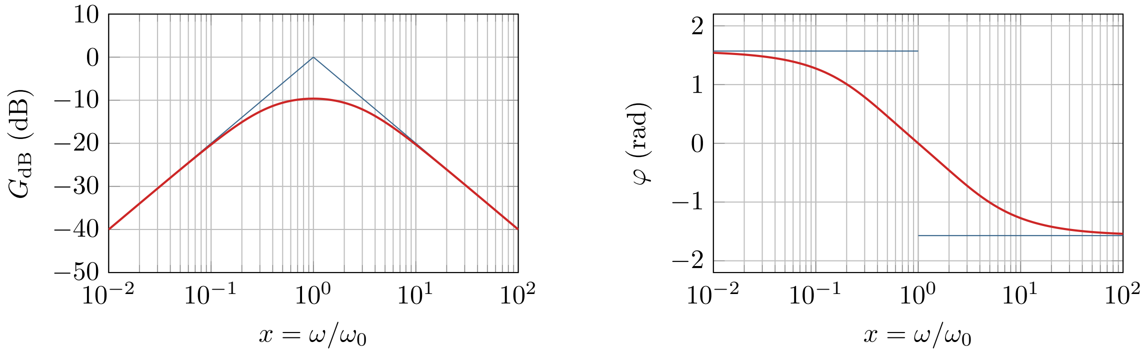

Figure 2 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge.

$\boxed{11}$ Numériquement, $\omega_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad (ce qui n'est pas possible à déterminer autrement que par un calcul exact, utiliser la valeur asymptotique $+\pi/2$ me semble acceptable aussi vue la question) ;
- ▷ Le terme pulsation $10\,\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\,\omega = 10\,\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1{,}2$ rad.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10}\cos(\omega t - 1{,}2) + \frac{E_0}{3}\cos(10\,\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(100\,\omega t + 1{,}2)$$

> ***Rappel de cours :*** *Pour un signal d'entrée*
>
> $$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$
>
> *le signal de sortie du filtre s'écrit*
>
> $$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)|\, E_n \cos\Big(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n)\Big)\,.$$

III - Filtre réjecteur

oral banque PT

12 • **Limite basse fréquence :** la bobine équivaut à un fil, donc la tension aux bornes de la cellule LC est nulle et on a $u_s = u_e$. Le filtre n'est donc ni un passe-haut, ni un passe-bande.

• **Limite haute fréquence :** le condensateur équivaut à un fil, donc par le même raisonnement $u_s = u_e$. Le filtre n'est donc pas non plus un passe-bas.

13 L'association parallèle de la bobine et du condensateur a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{LC}} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}\,.$$

Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{R}{R + \underline{Z_{LC}}} = \frac{R\,\underline{Y_{LC}}}{1 + R\,\underline{Y_{LC}}}$$

et en remplaçant

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}}{1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}}}\,.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\mathrm{j}L\omega/R$, la fonction de transfert s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}L\omega}{R} - LC\omega^2}\,.$$

On trouve alors immédiatement

$$\boxed{\underline{H}(\omega = \omega_0) = 0}\,,$$

ce qui signifie que le filtre rejette un signal de pulsation ω_0, d'où le nom qui lui est donné.

> *Même si cela est très tentant, il n'est pas possible d'identifier ici une éventuelle forme canonique : vous ne connaissez pas la forme canonique d'un coupe-bande, et elle n'est pas donnée par l'énoncé. Ainsi, vous n'avez aucun moyen de savoir si le terme $\mathrm{j}L\omega/R$ doit s'identifier à $\mathrm{j}Qx$ ou $\mathrm{j}x/Q$.*

14 La fréquence rejetée vaut

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{soit} \qquad {f_0}^2 = \frac{1}{4\pi^2\,LC} \qquad \text{et} \qquad \boxed{C = \frac{1}{4\pi^2\,{f_0}^2\,L} = 10\,\mu\mathrm{F}}\,.$$

15 Améliorer la sélectivité du filtre signifie que la bande rejetée doit être aussi étroite que possible. Par définition, les pulsations de coupure sont telles que

$$|\underline{H}(\omega = \omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{soit} \qquad |\underline{H}(\omega = \omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$$

avec ici

$$|\underline{H}| = \frac{\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}\,.$$

On cherche donc les pulsations telles que

$$\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)^2 = 1 \qquad \text{soit} \qquad RC\omega - \frac{R}{L\omega} = \pm 1\,.$$

On obtient alors une équation polynômiale du second degré,

$$RLC\omega^2 - R \pm L\omega = 0 \qquad \text{soit} \qquad \omega^2 \pm \frac{1}{RC}\omega - \frac{1}{LC} = 0\,.$$

Commençons par le signe ⊕. Les deux racines sont

$$\omega_\pm = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2} + \frac{4}{LC}}\,,$$

mais seule la solution avec le signe ⊕ est physiquement pertinente car l'autre donne une pulsation négative. De même, en prenant le signe ⊖ dans l'équation polynômiale, il vient

$$\omega'_\pm = +\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2} + \frac{4}{LC}}$$

avec cette fois encore la nécessité de conserver le signe ⊕ pour avoir une pulsation positive. On en déduit les deux pulsations de coupure,

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{R^2C^2} + \frac{4}{LC}} \pm \frac{1}{2RC}$$

et donc la bande passante, qui vaut

$$\Delta\omega = \omega_{\mathrm{c}+} - \omega_{\mathrm{c}-} = \frac{1}{RC}\,.$$

Par conséquent, il vaut mieux **choisir une résistance élevée** pour affiner la banque rejetée.

> *Par analogie avec un passe bande, la bande rejetée a une largeur*
>
> $$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$
>
> *Il faut donc maximiser le facteur de qualité pour la rendre la plus étroite possible ... mais dans cet exercice, le circuit n'est pas un RLC série, si bien que le facteur de qualité n'a pas son expression habituelle, mais il s'écrit*
>
> $$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,.$$
>
> *Comme indiqué plus haut, anticiper cette expression demande un recul qui me semble hors de portée au niveau PT.*
>
> *Notez néanmoins que l'examinateur a demandé au candidat ayant tiré cet exercice le lien entre $\Delta\omega$ et Q, puis une discussion sur la façon de dimensionner le facteur de qualité, avant de passer à l'exercice suivant sans que le candidat n'ait à se lancer dans les calculs de bande passante.*