



Hydrostatique et mécanique

Remonter un coffre au trésor

Dans tout l'exercice, on se place évidemment dans le référentiel terrestre que l'on considère galiléen.

- 1 L'axe z étant ascendant, la relation de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \quad \text{d'où} \quad \int_{P_0}^{P(z)} dP = -\rho g \int_h^z dz$$

d'où on déduit

$$P(z) = P_0 + \rho g(h - z).$$

- 2 Par symétrie, les forces de pression exercées sur les faces verticales du coffre se compensent. Lorsque le coffre touche le fond de la mer, seul le couvercle est soumis à la force pressante qui vaut donc

$$\vec{F}_p = -(P_0 + \rho g h) a^2 \vec{e}_z, \quad \text{car} \quad h - a \simeq h.$$

*** **Attention !** Comme le coffre est en contact avec le fond de la mer, la résultante des forces de pression qu'il subit ne peut pas être décrite par la poussée d'Archimède.

La force de pression appuie sur le coffre vers le bas, elle est donc de manière évidente dirigée selon $-\vec{e}_z$. Pour le montrer en passant par la force infinitésimale, il faut écrire

$$d\vec{F}_p = P(z=a) d\vec{S} \quad \text{avec} \quad d\vec{S} = -dx dy \vec{e}_z$$

puisque $d\vec{S}$ est par définition orienté dans le sens de la force.

Outre cette force, le système constitué du coffre et du ballon subit également

▷ son poids

$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$$

▷ la résultante des forces de pression exercées sur le ballon, qui peuvent se décrire par la poussée d'Archimède car il est totalement immergé,

$$\vec{\Pi}_b = \rho V g \vec{e}_z$$

▷ la force de réaction exercée par le fond de la mer : $\vec{N} = N \vec{e}_z$.

Ainsi, tant que le coffre touche le fond, d'après le théorème de la résultante cinétique,

$$0 = -(P_0 + \rho g h) a^2 - mg + \rho V g + N$$

et le coffre décolle lorsque N s'annule, d'où

$$0 = -(P_0 + \rho g h) a^2 - mg + \rho V_0 g \quad \text{soit} \quad V_0 = \frac{m}{\rho} + \frac{P_0 a^2}{\rho g} + ha^2.$$

Rappel : Pour établir une condition de décollage de manière rigoureuse, il faut toujours chercher une force de réaction qui s'annule. Ne pas inclure la force de contact dans le bilan des forces et partir sur $\sum \vec{F} = \vec{0}$ conduit au bon résultat mais d'une manière non rigoureuse ... et donc à éviter.

- 3 Lors de la remontée, le coffre est totalement immergé donc la force pressante qu'il subit est décrite par la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_c = \rho a^3 g \vec{e}_z.$$

Dès que c'est possible, c'est-à-dire dès qu'il y a immersion complète, la résultante des forces de pression se calcule via la poussée d'Archimède. C'est beaucoup plus facile que de passer par une sommation des forces pressantes sur chaque face, même si dans le cas particulier d'un cube le calcul est assez simple.

Les autres forces sont inchangées, si ce n'est la force de réaction qui n'existe plus. Le volume minimal V_{\min} du ballon est celui qui permet de maintenir le coffre en équilibre, soit d'après le théorème de la résultante cinétique

$$0 = \rho a^3 g - mg + \rho V_{\min} g \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{\min} = \frac{m}{\rho} - a^3.}$$

On constate que $V_{\min} < m/\rho$ alors que $V_0 > m/\rho$, et donc $V_0 > V_{\min}$: si le volume du ballon est suffisant pour décoller le coffre, alors il est suffisant pour le remonter. Il n'est donc pas nécessaire de continuer à gonfler le ballon une fois que le coffre a décollé.

4 D'après le théorème de la résultante cinétique, lorsque de ballon remonte,

$$m \frac{d(v \vec{e}_z)}{dt} = -mg \vec{e}_z + \rho(V + a^3)g \vec{e}_z - \lambda v \vec{e}_z$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{\lambda}{m}}_{=1/\tau} v = -g + \underbrace{\frac{\rho}{m}(V + a^3)g}_{=A}}$$

qui est bien de la forme demandée.

5 L'équation différentielle s'intègre en

$$v(t) = K e^{-t/\tau} + \tau A \quad \text{avec} \quad K = \text{cte.}$$

La vitesse initiale du coffre est nulle, donc

$$v(t=0) = \underbrace{K}_{\text{expr}} + \tau A \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad K = -\tau A$$

et finalement

$$\boxed{v(t) = \tau A (1 - e^{-t/\tau}).}$$

Procédons par séparation des variables pour déterminer la position,

$$v(t) = \frac{dz}{dt} \quad \text{soit} \quad \int_0^{z(t)} dz = \tau A \int_0^t (1 - e^{-t/\tau}) dt$$

ce qui donne

$$z(t) - z(0) = \tau A \left[t + \tau e^{-t/\tau} \right]_0^t = \tau A (t + \tau e^{-t/\tau} - 0 - \tau)$$

Bien sûr, il est aussi possible de passer par une intégration « traditionnelle »,

$$z(t) = \tau A t - \tau A \times (-\tau e^{-t/\tau}) + K' \quad \text{avec} \quad K' = \text{cte.}$$

Le coffre touche le fond à l'instant initial, donc

$$z(t=0) = \underbrace{\tau^2 A}_{\text{expr}} + K' \stackrel{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad K' = -\tau^2 A$$

Attention alors à ne pas aller trop vite ! La constante d'intégration n'est pas égale à $z(0)$, tout simplement car la primitive « usuelle » ne s'annule pas. Il faut donc poser explicitement le calcul pour ne pas se tromper.

6 Puisque $\Delta t \gg \tau$, alors la durée du transitoire est négligeable et on peut supposer la vitesse de remontée du coffre constamment égale à la vitesse limite τA . La durée nécessaire pour parcourir toute la hauteur h et atteindre la surface est donc telle que

$$\boxed{\Delta t = \frac{h}{\tau A}.}$$

Travailler directement sur l'équation précédente est possible, mais plus technique. Il faut chercher Δt tel que $z(t = \Delta t) = h$, soit

$$\tau A \Delta t + \tau^2 A \left(e^{-\Delta t/\tau} - 1 \right) = h$$

et comme $\Delta t \gg \tau$ alors $e^{-\Delta t/\tau} \ll 1$ donc l'équation précédente se simplifie en

$$\tau A \Delta t - \tau^2 A = h$$

d'où on déduit

$$\Delta t = \tau + \frac{h}{\tau A} \simeq \frac{h}{\tau A},$$

car par hypothèse $\tau \ll \Delta t$.

7 Le ballon constitue un système fermé (quantité de matière $n = \text{cte}$) à température constante, donc d'après l'équation d'état des gaz parfaits appliquée en $z = 0$ et en z quelconque on a

$$(P_0 + \rho g h) V_0 = nRT \quad \text{et} \quad [P_0 + \rho g(h - z)] V(z) = nRT$$

si bien que

$$(P_0 + \rho g h) V_0 = [P_0 + \rho g(h - z)] V(z)$$

et ainsi

$$V(z) = \frac{P_0 + \rho g h}{P_0 + \rho g h - \rho g z} V_0.$$

Le volume du ballon augmente lorsque z augmente, ce qui est **a priori un avantage** car cela augmente la poussée d'Archimède et tend donc à accélérer le ballon, mais **peut devenir un inconvénient** si le ballon explose alors qu'il est sous l'eau.

8 Calculons la hauteur z^* à laquelle le ballon explose. D'après ce qui précède,

$$(P_0 + \rho g h) V_0 = [P_0 + \rho g(h - z^*)] V^* \quad \text{avec} \quad V^* = \frac{4}{3} \pi (2R_0)^3 = 8V_0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_0 + \rho g h &= 8(P_0 + \rho g h) - 8\rho g z^* \\ 8\rho g z^* &= 7(P_0 + \rho g h) \end{aligned}$$

$$z^* = \frac{7}{8} h + \frac{7}{8} \frac{P_0}{\rho g}$$

Le coffre est remonté à la surface à condition d'avoir $z^* > h$, soit

$$\frac{7}{8} \frac{P_0}{\rho g} > \frac{h}{8}.$$

Pour que le ballon puisse remonter à la surface avant d'exploser, il faut donc que la profondeur soit telle que

$$h < h_{\max} = 7 \frac{P_0}{\rho g} = 70 \text{ m}.$$