



BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

DM 8 – à rendre lundi 27 novembre

Correction

Révisions de mécanique

Trampoline

A - Le trampoline oscille

1 Voir figure 1.

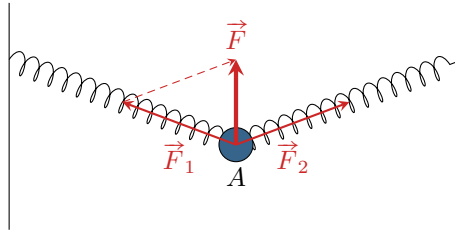


Figure 1 – Force exercée par le trampoline sur Anatole.

2 D'après le théorème de Pythagore, les deux ressorts ont même longueur

$$\ell = \sqrt{R^2 + z^2} \quad \text{donc} \quad \Delta\ell = \sqrt{R^2 + z^2} - \ell_0.$$

L'énergie potentielle élastique totale vaut donc

$$\begin{aligned} E_{\text{pe}} &= 2 \times \frac{1}{2} k \left(\sqrt{R^2 + z^2} - \ell_0 \right)^2 \\ &= k \left(R^2 + z^2 - 2\ell_0 \sqrt{R^2 + z^2} + \ell_0^2 \right) \\ &= k \left(R^2 + z^2 - 2\alpha R \sqrt{R^2 \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)} + \alpha^2 R^2 \right) \end{aligned}$$

$$E_{\text{pe,tot}} = k \left((1 + \alpha^2) R^2 + z^2 - 2\alpha R^2 \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} \right)$$

3 Par un développement limité,

$$\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}} = \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{z^2}{2R^2},$$

et ainsi

$$\begin{aligned} E_{\text{pe,tot}} &= k \left((1 + \alpha^2) R^2 + z^2 - 2\alpha R^2 - 2\alpha R^2 \frac{z^2}{2R^2} \right) \\ &= k \left((1 - 2\alpha + \alpha^2) R^2 + z^2 - \alpha z^2 \right) \\ E_{\text{pe}} &= k \left[(1 - \alpha)^2 R^2 + (1 - \alpha) z^2 \right] \end{aligned}$$

On identifie alors

$$E_0 = k(1 - \alpha)^2 R^2 \quad \text{et} \quad K = 2k(1 - \alpha).$$

4 On constate que le trampoline est équivalent à un unique ressort vertical, de raideur K et de longueur à vide nulle.

La force résultante $\vec{F}$ se déduit de l'expression de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{pe,tot} = -\frac{dE_{pe}}{dz} \vec{e}_z = -Kz \vec{e}_z,$$

dont l'expression est heureusement conforme à celle de la force de rappel exercée par un ressort. Comme α est assez proche de 1, la raideur verticale équivalente K est nettement inférieure à la raideur horizontale k , ce qui est conforme au comportement d'un trampoline : enfoncer le centre du trampoline est très simple, mais l'attacher à son support est autrement plus difficile.

5 Anatole est soumis à son poids et aux forces de rappel des ressorts, c'est-à-dire uniquement à des forces conservatives. Son énergie mécanique est donc une constante du mouvement. Le mouvement d'Anatole étant vertical,

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2}Kz^2 + E_0,$$

et ainsi

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}m \times 2\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} + \frac{1}{2}K \times 2\dot{z}z.$$

La vitesse $\dot{z}$ ne pouvant pas être constamment nulle (ce qui signifierait qu'Anatole ne bouge pas), on en déduit

$$m\ddot{z} + mg + Kz = 0,$$

ou encore

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{=\omega_0^2} z = -g$$

On remarque qu'on arrive exactement à la même équation que celle obtenue par application du théorème de la résultante cinétique ... et heureusement !

Une solution particulière de cette équation est

$$Z_0 = -\frac{mg}{K}$$

et donc la forme générale de ses solutions est

$$z(t) = Z_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec A et B deux constantes dépendant des conditions initiales.

La solution particulière est celle qui décrit le régime permanent, donc ici les positions d'équilibre : comme test de vraisemblance, pensez à vérifier la cohérence physique de l'expression, ici $Z_0 < 0$ (Anatole s'enfonce), fonction croissante de m (plus il est lourd, plus il s'enfonce) et décroissante de k (plus le trampoline est raide, moins Anatole s'enfonce).

Approche par les forces

6 Voir figure 1.

7 On constate que le trampoline est équivalent à un unique ressort vertical, de raideur K et de longueur à vide nulle.

8 Anatole est soumis à la force $\vec{F}$ et à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$. D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué dans le référentiel terrestre, considéré galiléen,

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{F} + \vec{P} \quad \text{soit} \quad m\ddot{z} = -Kz - mg$$

ou encore

$$\ddot{z} + \underbrace{\frac{K}{m}}_{=\omega_0^2} z = -g$$

On remarque qu'on arrive exactement à la même équation que celle obtenue par application du théorème de l'énergie mécanique ... et heureusement !

Une solution particulière de cette équation est

$$Z_0 = -\frac{mg}{K}$$

et donc la forme générale de ses solutions est

$$z(t) = Z_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec A et B deux constantes dépendant des conditions initiales.

La solution particulière est celle qui décrit le régime permanent, donc ici les positions d'équilibre : comme test de vraisemblance, pensez à vérifier la cohérence physique de l'expression, ici $Z_0 < 0$ (Anatole s'enfonce), fonction croissante de m (plus il est lourd, plus il s'enfonce) et décroissante de k (plus le trampoline est raide, moins Anatole s'enfonce).

B - Anatole décolle ?

9 Anatole étant sur le tapis du trampoline, la force $\vec{N}$ est forcément **verticale vers le haut** tout au long du mouvement, tant qu'Anatole se trouve sur le tapis.

10 On étudie de nouveau le mouvement d'Anatole dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, pendant qu'il est en contact avec le trampoline. Il est soumis à la force de contact $\vec{N} = N\vec{e}_z$ et à son poids $-mg\vec{e}_z$. D'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\vec{e}_z$,

$$m\ddot{z} = N - mg.$$

En exprimant $\ddot{z}$ à partir de l'expression donnée dans l'énoncé,

$$+m\omega^2 Z_1 \cos(\omega t) = N - mg$$

et ainsi

$$N = mg + m\omega^2 Z_1 \cos(\omega t).$$

11 Comme dit précédemment, Anatole reste en contact avec le trampoline tant que $N > 0$. Il y a donc rupture de contact lorsque N s'annule. Comme $-1 \leq \cos(\omega t) \leq 1$, l'annulation n'est possible que si

$$\omega^2 Z_1 > g.$$

Cette condition est d'autant plus facile à remplir que Z_1 est élevé, c'est-à-dire que les oscillations sont de **forte amplitude**, et ω est élevé, c'est-à-dire que les oscillations sont de **haute fréquence**. Ces deux résultats semblent qualitativement raisonnables : à la limite des faibles amplitudes et des basses fréquences, le trampoline ne bouge presque pas, et il est évident qu'Anatole ne peut pas décoller dans ces conditions.

C - Le grand saut !

12 Notons t_d l'instant du décollage, tel que

$$N(t_d) = mg + m\omega^2 Z_1 \cos(\omega t_d) = 0.$$

Or juste avant le décollage ($t = t_d^-$), Anatole est encore en contact avec le tapis, donc

$$z_d = Z_0 - Z_1 \cos(\omega t_d).$$

De la première expression, on obtient

$$Z_1 \cos(\omega t_d) = -\frac{g}{\omega^2}$$

si bien que

$$z_d = Z_0 + \frac{g}{\omega^2}.$$

13 Par définition,

$$v_d = \dot{z}(t_d) = +\omega Z_1 \sin(\omega t_d) = \omega Z_1 \sqrt{1 - \cos^2(\omega t_d)},$$

et en réutilisant la question précédente

$$v_d = \omega Z_1 \sqrt{1 - \frac{g^2}{Z_1^2 \omega^4}}.$$

14 Les frottements étant négligés, Anatole n'est soumis qu'à son poids, et son mouvement est donc conservatif. Son énergie mécanique conserve la même valeur au décollage et au sommet du saut, où la vitesse est nulle :

$$E_m \underset{\substack{\uparrow \\ \text{décollage}}}{=} mgz_d + \frac{1}{2}mv_d^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sommet}}}{=} mgh + 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} h &= z_d + \frac{v_d^2}{2g} \\ &= Z_0 + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 Z_1^2}{2g} \left(1 - \frac{g^2}{Z_1^2 \omega^4} \right) \\ &= Z_0 + \frac{g}{\omega^2} + \frac{\omega^2 Z_1^2}{2g} - \frac{g}{2\omega^2} \\ h &= Z_0 + \frac{g}{2\omega^2} + \frac{\omega^2 Z_1^2}{2g}. \end{aligned}$$

La méthode est à retenir : lorsque que l'on cherche une position où la vitesse a un comportement particulier (ici, s'annule) ou réciproquement que l'on cherche la vitesse à un endroit donné, il est presque toujours plus efficace de raisonner énergétiquement si le mouvement est conservatif.