



Mécanique des fluides

I - Alimentation en eau du plateau Est rouennais

Un schéma d'ensemble de l'installation définissant les différents points utiles au calcul est représenté figure 1.

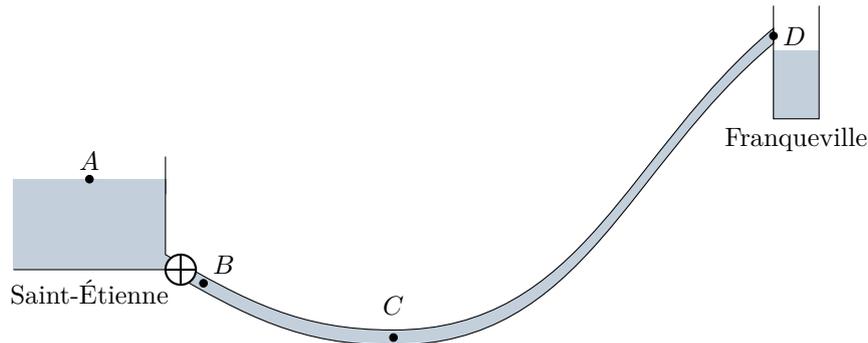


Figure 1 – Schéma de la canalisation.

1 Le débit volumique de l'installation vaut

$$D_V = \frac{10 \cdot 10^3}{24 \times 3600} = 0,116 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

d'où on déduit la vitesse débitante

$$V = \frac{D_V}{\pi D^2/4} = 0,589 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le nombre de Reynolds vaut

$$Re = \frac{VD\rho}{\eta} = 2,9 \cdot 10^5,$$

l'écoulement est donc **turbulent**.

Il est bien sûr possible de calculer le nombre de Reynolds avec davantage de chiffres significatifs, cependant l'usage est de se limiter à un voire deux chiffres maximum, puisque seul l'ordre de grandeur est pertinent.

2 Appliquons la relation de Bernoulli entre la surface libre du bassin de pompage à Saint-Étienne (point A auquel $P_A = P_{\text{atm}}$, $v_A \simeq 0$ car le bassin est de grande taille, $z_A = 6 \text{ m}$) et la sortie de la conduite à Franqueville (point D où $P_D = P_{\text{atm}}$, $v_D = V$, $z_D = 159 \text{ m}$),

$$D_m \left[\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz_D \right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gz_A \right) \right] = \mathcal{P}_i$$

ce qui donne

$$\mathcal{P}_i = \rho D_V \left(\frac{V^2}{2} + g(z_D - z_A) \right) = 174 \text{ kW}.$$

3 La conduite a une rugosité relative $e/D = 1 \cdot 10^{-3}$. Suivant la courbe correspondant à cette rugosité jusqu'à $Re = 3 \cdot 10^5$, on obtient (approximativement ...)

$$\Lambda \simeq 1,8 \cdot 10^{-2}.$$

4 En appliquant directement le résultat précédent avec $L = 8 \text{ km}$,

$$\Delta h = \Lambda \frac{V^2}{2gD} L = 5,1 \text{ m}.$$

D'après la relation de Bernoulli généralisée appliquée entre les mêmes points qu'à la question 2,

$$D_m \left[\left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz_D \right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gz_A \right) \right] = \mathcal{P}_i - D_m g \Delta h$$

ce qui donne

$$\mathcal{P}_i = \rho D_V \left(\frac{V^2}{2} + g(z_D + \Delta h - z_A) \right) = 180 \text{ kW}.$$

Pour compenser les pertes de charge, la station de pompage doit donc fournir une puissance plus élevée d'environ 5 %, ce qui est relativement peu.

On retrouve clairement sur cette expression le sens physique de la hauteur équivalente à la perte de charge : la puissance indiquée est la même que si l'écoulement était parfait mais que l'eau devait gravir 6 m de dénivellation supplémentaire.

5 La puissance électrique consommée vaut donc

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{P}_i}{0,85} = 211 \text{ kW}.$$

Si la station de pompage fonctionnait en continu à son débit maximal, l'énergie totale consommée sur un an serait de

$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \mathcal{P}_{\text{élec}} \times 365 \times 24 \text{ h} = 1,85 \cdot 10^6 \text{ kWh}.$$

Cela signifierait que le coût pour transporter l'eau de Saint-Étienne à Franqueville représente 1 % de la consommation de la ville de Rouen ! Rouen n'est certes pas toute la métropole, mais compte tenu de la diversité des usages de l'électricité, c'est considérable ! Ce chiffre est heureusement surestimé car la station de pompage ne fonctionne pas en continu à son débit maximal, mais uniquement pour faire l'appoint du niveau d'eau dans le réservoir.

Les valeurs de puissance ne sont pas irréalistes pour autant : à débit maximal, 420 m³ sont transportés en une heure pour un coût énergétique de 210 kWh, soit 0,5 kW · h · m⁻³, ce qui est un ordre de grandeur cohérent pour un réseau d'eau potable compte tenu du fort dénivelé.

6 S'il n'y a pas d'écoulement dans la conduite (par exemple si les vannes d'alimentation sont fermées), alors le profil de pression est de type hydrostatique et la pression est nécessairement maximale au point bas de l'installation, c'est-à-dire au point C . Cependant, lorsque l'écoulement est établi, les pertes de charge affectent la pression qui diminue linéairement le long de la conduite, et si ces pertes de charge sont importantes il se peut que le point bas ne soit plus celui de plus haute pression, qui pourrait alors être celui où les pertes de charge sont minimales, c'est-à-dire le point B situé juste après la pompe.

7 Appliquons de nouveau la relation de Bernoulli, cette fois entre la surface libre du bassin de pompage (point A) et le point B situé juste après la pompe (pression P_B , vitesse V égale à la vitesse débitante). Ces deux points sont supposés à la même altitude et on néglige la perte de charge entre eux. Toute la puissance indiquée est reçue par le fluide entre ces deux points, donc la relation de Bernoulli s'écrit

$$\rho D_V \left[\left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) - \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} \right] = \mathcal{P}_i$$

ce qui donne

$$P_B = P_{\text{atm}} - \frac{\rho V^2}{2} + \frac{\mathcal{P}_i}{D_V} = 16 \text{ bar}.$$

8 Les propriétés de l'écoulement sont identiques tout au long de la conduite, donc au point C situé à une distance $\ell = 500 \text{ m}$ de la station de pompage, la perte de charge vaut

$$\Delta h_C = \Lambda \frac{V^2}{2gD} \ell = 32 \text{ cm}.$$

D'après la relation de Bernoulli entre le bassin de pompage ($z_A = 6 \text{ m}$) et le point C ($z_C = -43 \text{ m}$),

$$\rho D_V \left[\left(\frac{P_C}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz_C \right) - \left(\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + 0 + gz_A \right) \right] = P_i - \rho D_V g \Delta h_C$$

ce qui donne

$$P_C = P_{\text{atm}} - \frac{\rho V^2}{2} + \frac{P_i}{D_V} + \rho g(z_A - z_C - \Delta h_C) = 21 \text{ bar} .$$

C'est donc au point bas de l'installation que la pression est maximale.

II - Remontée du magma

A - Écoulement de Poiseuille en conduite cylindrique horizontale

9 L'écoulement est invariant par toute rotation autour de l'axe de la conduite, le champ de vitesse est donc indépendant de θ . En revanche, il n'y a pas d'invariance par translation car la pression dépend de z , mais puisque l'écoulement est incompressible alors

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

ce qui indique que v_z est indépendant de z .

10 Voir figure 2. Le cylindre subit les forces pressantes sur ses deux faces planes, et des forces visqueuses sur toute sa paroi latérale. Par symétrie, on comprend que la résultante de ces forces visqueuses s'applique au centre géométrique du cylindre, et elle est forcément dirigée selon $-\vec{e}_z$ car elle ne peut que ralentir l'écoulement du magma. La résultante des forces pressantes sur la paroi latérale du cylindre est nulle. Le profil de vitesse attendu est de type Poiseuille.

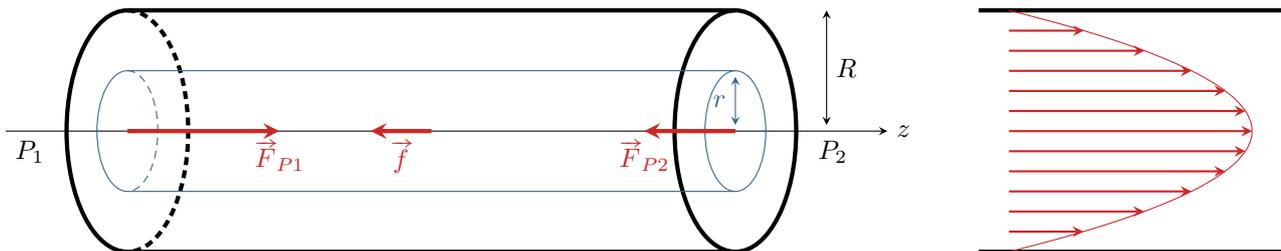


Figure 2 – Schéma du cylindre horizontal considéré.

11 Le cylindre considéré subit des forces visqueuses à sa surface tangente à l'écoulement, c'est-à-dire uniquement sur la partie latérale en r . Puisque l'écoulement est plus rapide au centre de la conduite alors la force visqueuse exercée par la partie extérieure de l'écoulement sur le cylindre doit être portée par $-\vec{e}_z$. Elle s'écrit

$$\vec{v} = -\eta \iint_{\text{cyl}} \left| \frac{dv_z}{dr} \right| dS \vec{e}_z$$

Puisque v_z ne dépend que de r alors dv_z/dr aussi, et comme on intègre sur un domaine à $r = \text{cte}$ alors le taux de cisaillement est constant sur le domaine d'intégration. Ainsi,

$$\vec{v} = -\eta \left| \frac{dv_z}{dr} \right| \iint_{\text{cyl}} dS \vec{e}_z = -\eta \left| \frac{dv_z}{dr} \right| \times 2\pi r L \vec{e}_z .$$

Enfin, la vitesse v_z est une fonction décroissante de r donc sa dérivée est négative, si bien que

$$\left| \frac{dv_z}{dr} \right| = -\frac{dv_z}{dr} .$$

On en déduit l'expression donnée par l'énoncé :

$$\vec{f} = +2\pi\eta r L \frac{dv_z}{dr}(r) \vec{e}_z$$

... qui, contrairement aux apparences, est bien dirigée selon $-\vec{e}_z$!

12 L'écoulement étant stationnaire, le cylindre n'accélère pas, et la somme des forces qu'il subit est nulle. D'après le théorème de la résultante cinétique appliqué au cylindre dans le référentiel terrestre,

$$\vec{f} + \vec{F}_{P_1} + \vec{F}_{P_2} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad 2\pi\eta r L \frac{dv_z}{dr}(r) \vec{e}_z + P_1 \pi r^2 \vec{e}_z - P_2 \pi r^2 \vec{e}_z = \vec{0}.$$

En simplifiant,

$$2\eta L \frac{dv_z}{dr} + P_1 r - P_2 r = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta L} r.}$$

13 Intégrons par séparation de variables, sachant que, le fluide étant visqueux, la vitesse v_z est nulle au contact de la paroi en $r = R$.

$$\int_0^{v_z(r)} dv_z = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \int_R^r dr$$

ce qui donne

$$\boxed{v_z(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2).}$$

14 La vitesse débitante au travers d'une section de la conduite vaut

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\text{section}} \vec{v} \cdot \vec{dS} \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \frac{\Delta p}{4\eta L} \iint (R^2 - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\Delta p}{4\pi\eta R^2 L} \times 2\pi \times \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\ &= \frac{\Delta p}{2\eta R^2 L} \times \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\Delta p}{2\eta R^2 L} \times \frac{R^4}{4} \\ &= \frac{\Delta p}{8\eta L} R^2 \end{aligned}$$

ce qui conduit bien à

$$\boxed{\Delta p = \frac{8\eta L}{R^2} U.}$$

15 On constate que la chute de pression Δp est proportionnelle à la viscosité, et en particulier qu'elle est nulle pour un fluide parfait, ce qui confirme que l'on peut l'interpréter comme une perte de charge. En outre, Δp est proportionnelle à la longueur de la conduite et en aucun cas associé à un changement de géométrie, ce qui est le signe caractéristique d'une perte de charge régulière. En identifiant l'expression de Δp à la relation de Darcy-Weisbach,

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{R^2} U = \frac{1}{4} \lambda \frac{L}{R} \rho U^2 \quad \text{d'où} \quad \lambda = 32 \frac{\eta}{U \rho R}$$

Sachant que le nombre de Reynolds est défini à partir du diamètre $2R$ de la conduite, on trouve bien

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}.}$$

16 Un débit de magma de $D_V = 50 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ au travers d'une cheminée de rayon $R = 10 \text{ m}$ donne une vitesse débitante

$$\boxed{U = \frac{D_V}{\pi R^2} = 0,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},}$$

et un nombre de Reynolds

$$\boxed{Re = \frac{2UR\rho}{\eta} = 0,4.}$$

L'écoulement du magma est clairement laminaire, ce qui justifie d'utiliser les résultats de la partie précédente, en particulier pour le calcul des pertes de charge.

17 Appliquons le théorème de Bernoulli entre la chambre magmatique (pression P_{ch} , vitesse nulle, altitude nulle) et la bouche éruptive du volcan (pression atmosphérique P_0 , vitesse débitante U , altitude H).

$$\left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH \right) - \left(\frac{P_{\text{ch}}}{\rho} + \frac{0^2}{2} + 0 \right) = -\frac{\Delta p}{\rho}$$

ce qui donne

$$P_{\text{ch}} = P_0 + \Delta p + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho gH.$$

En reprenant l'expression de Δp pour une cheminée magmatique de hauteur H ,

$$P_{\text{ch}} = P_0 + \frac{8\eta H}{R^2}U + \frac{1}{2}\rho U^2 + \rho gH$$

Numériquement, en pascal,

$$P_{\text{ch}} = 1,0 \cdot 10^5 + 1,2 \cdot 10^6 + 3,4 \cdot 10^1 + 1,3 \cdot 10^8 \quad \text{soit} \quad P_{\text{ch}} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ bar}.$$

On constate que l'effet de la pesanteur est très largement majoritaire, et qu'en pratique tout se passe comme si la pression dans la chambre magmatique étant uniquement contrainte par l'hydrostatique.