DM 10 – à rendre lundi 18 décembre

Correction

Électrostatique

Micro-miroir pour projecteur de cinéma

inspiré de « La physique en applications », Renaud Carpentier

A - Force d'attraction électrostatique entre armatures d'un condensateur plan

1 Cf cours et TD.

2 Le plan (P), situé en $z = d$, est chargé positivement alors que le plan (P'), en $z = 0$, est chargé négativement. Le champ total s'obtient par superposition. On en déduit les résultats suivants :

Valeurs de z	$]-\infty, 0]$	$[0, d]$	$[d, +\infty[$
Champ créé par (P)	$-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Champ créé par (P')	$+\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	$-\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Champ total	$\vec{0}$	$-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$	$\vec{0}$

3 À l'intérieur du condensateur,

$$\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

En séparant les variables,

$$\int_{V(0)}^{V(d)} \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d \mathrm{d}z$$

ce qui donne

$$V(d) - V(0) = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

où l'on identifie la tension aux bornes du condensateur, d'où

$$\boxed{\sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{d}\,.}$$

4 L'élément de surface considéré porte une charge $\sigma\,\mathrm{d}S$, placée dans le champ électrostatique créé par le plan (P'). Il subit donc une force de Lorentz électrique

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \sigma\,\mathrm{d}S\,\vec{E}_{(P')} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}S\,\vec{e}_z\,.$$

Chaque portion élémentaire du plan (P) subit la même force, si bien que la résultante s'écrit

$$\vec{F} = \int \overrightarrow{\mathrm{d}F} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\vec{e}_z\,.$$

En reprenant l'expression de σ établie précédemment,

$$\vec{F} = -\frac{S}{2\varepsilon_0}\frac{{\varepsilon_0}^2U^2}{d^2}\vec{e}_z \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}\vec{e}_z\,.}$$

B - Mise en mouvement d'un micro-miroir

5 On a simplement

6 Le micro-miroir subit quatre actions mécaniques : son poids, de moment nul car s'appliquant en O, une action de liaison de moment nul également, et les deux forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ exercées par les deux électrodes. Ces deux forces ont pour bras de levier $L\cos\alpha$. Étant donné que $\vec{F}_A$ fait tourner en sens direct autour de l'axe (Oz) et $\vec{F}_B$ en sens indirect,

$$\mathcal{M}_z = +F_A\,L\cos\alpha - F_B\,L\cos\alpha \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{M}_z = \frac{\varepsilon_0 L S_0}{2}\left[\left(\frac{V_M - V_B}{d_B}\right)^2 - \left(\frac{V_M - V_A}{d_A}\right)^2\right]}\,.$$

7 On a simplement

$$d_A = d_0 - L\,\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad d_B = d_0 + L\,\sin\alpha\,.$$

8 Imaginons le micro-miroir en position intermédiaire : $d_A = d_B = d_0$. Dans l'état ①, la tension $V_M - V_B > V_M - V_A$, la force exercée par l'électrode B est plus importante, donc le miroir tend à basculer vers la gauche : il est dans la position « 0 ». Réciproquement, l'état d'alimentation ② donne la position « 1 ».

9 Supposons le micro-miroir en position « 0 » pour $t < 0$, avec un basculement de l'état d'alimentation à $t = 0$. Juste après le basculement, $V_M - V_A = 22\,\mathrm{V}$, $V_M - V_B = 17\,\mathrm{V}$ et $\alpha = -10°$ car le micro-miroir n'a pas encore bougé. On a alors

$$\left(\frac{V_M - V_A}{d_0 - L\sin\alpha}\right)^2 - \left(\frac{V_M - V_B}{d_0 + L\sin\alpha}\right)^2 = -1{,}7\cdot 10^2\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{µm}^{-2} < 0\,.$$

Le miroir reste attiré vers la gauche, et ne peut pas basculer. La phase de lâcher est donc indispensable.

> *On peut d'ailleurs vérifier que lors de cette phase*
>
> $$\left(\frac{V'_M - V_A}{d_0 - L\sin\alpha}\right)^2 - \left(\frac{V'_M - V_B}{d_0 + L\sin\alpha}\right)^2 = 3\cdot 10^2\,\mathrm{V}\cdot\mu\mathrm{m}^{-2} > 0\,.$$
>
> *Le miroir pivote donc.*