DM 12 – à rendre lundi 22 janvier *Correction*

Induction

Freinage d'une luge

adapté ATS 2014

A - Analyse qualitative

1 Dès que la luge entre dans la zone magnétique, l'aire du cadre soumise à $\vec{B}$ augmente, le flux magnétique au travers du cadre varie, et il y a donc un phénomène d'induction dans le cadre. D'après la loi de Lenz, de ce phénomène d'induction résulte une force de Laplace induite subie par la partie du cadre soumise au champ magnétique qui s'oppose au mouvement de la luge et la ralentit. Lorsque la luge est entièrement dans la zone magnétique, le flux au travers du cadre ne varie plus, et il n'y a donc plus de phénomène d'induction.

2 Voir figure 1. Seules les parties du cadre se trouvant dans la zone magnétique subissent la force de freinage. Le sens du courant y étant opposées, les forces de Laplace se compensent entre les deux portions colinéaires à $\vec{e}_x$. De plus, puisqu'il s'agit d'une force qui s'oppose au mouvement, on sait que la résultante est portée par $-\vec{e}_x$.

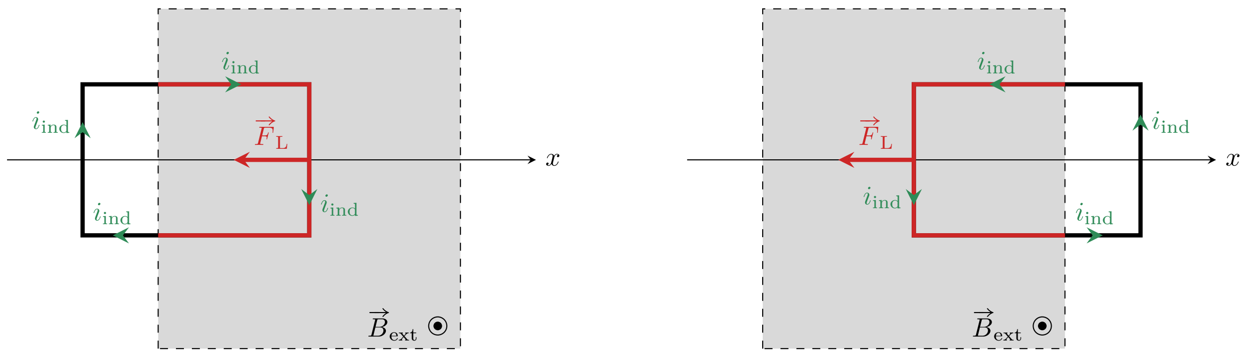

Figure 1 – **Analyse qualitative du mouvement de la luge.**

3 Connaissant le sens de la force de Laplace et le sens du champ magnétique, on en déduit le sens du courant à partir des propriétés du produit vectoriel.

B - Entrée dans la zone magnétique

4 Le cadre est orienté comme indiqué figure 1, schéma de gauche : sa normale est $-\vec{e}_z$. L'aire du cadre soumise au champ magnétique vaut $\ell\, x(t)$. Le flux magnétique au travers du cadre vaut donc

$$\Phi = \iint B\,\vec{e}_z \cdot (-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = -B\,\ell\,x\,.$$

D'après la loi de Faraday, on en déduit

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = +\ell B \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{e = +\ell B v\,.}$$

5 Le circuit équivalent ne contient donc que la fém e en série avec la résistance R_{c} du cadre. La loi des mailles donne

$$e = R_{\text{c}} i \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i = +\frac{\ell B v}{R_{\text{c}}}}$$

6 La force de Laplace subie par un élément $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ de cadre orienté dans le même sens que i vaut

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{L}} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}\,.$$

Avec les notations de la figure 2, la force résultante s'obtient par intégration le long de la portion du cadre soumise au champ magnétique, orientée par la règle de la main droite autour de $\overrightarrow{e}_z$:

$$\overrightarrow{F}_{\rm L} = i\int_{\widehat{M_1M_2}} (+\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{e}_x) \wedge B\,\overrightarrow{e}_z + i\int_{\widehat{M_2M_3}} (-\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{e}_y) \wedge B\,\overrightarrow{e}_z + i\int_{\widehat{M_3M_4}} (-\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{e}_x) \wedge B\,\overrightarrow{e}_z$$

Il y a compensation des forces exercées sur les portions de cadre M_1M_2 et M_3M_4, et on obtient finalement

$$\overrightarrow{F}_{\rm L} = -i\ell B\,\overrightarrow{e}_x$$

En combinant avec la question précédente, il vient

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\rm L} = -\frac{\ell^2 B^2}{R_{\rm c}} v\,\overrightarrow{e}_x\,.}$$

Comme attendu, cette force est une force de freinage, de sens opposé à $\overrightarrow{v}$.

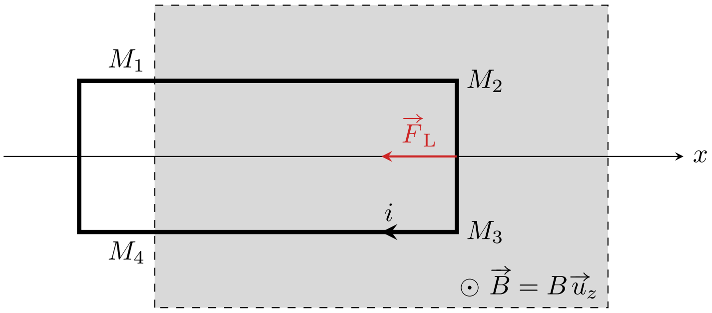

Figure 2 – Calcul de la force de Laplace résultante sur la luge.

$\boxed{7}$ • **Système :** luge ;

• **Référentiel :** terrestre, supposé galiléen ;

• **Bilan des forces :**

▷ force de Laplace : $\overrightarrow{F}_{\rm L} = -\dfrac{\ell^2B^2}{R_{\rm c}} v\,\overrightarrow{u}_x$;

▷ comme le mouvement est par hypothèse horizontal, les forces verticales (poids $\overrightarrow{P}$ et réaction de la piste $\overrightarrow{R}$) se compensent.

• **Théorème de la résultante cinétique :**

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{\rm L} + \overrightarrow{R}$$

soit en projection avec $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{e}_x$

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\ell^2B^2}{R_{\rm c}} v\,.}$$

• **Résolution :** sous forme canonique cette équation devient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell^2B^2}{m\,R_{\rm c}} v = 0$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\tau = \frac{m\,R_{\rm c}}{\ell^2B^2} = 0{,}4\,\mathrm{s}\,.}$$

et d'en déduire les solutions sous la forme

$$v(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad v(t\!=\!0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} v_{\rm a}$$

soit finalement

$$\boxed{v(t) = v_{\rm a}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

8 Par séparation des variables,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_\mathrm{a}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{donc} \qquad \int_0^{x(t)} \mathrm{d}x = v_\mathrm{a} \int_0^t \mathrm{e}^{-t/\tau} \mathrm{d}t$$

car $x(0) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = \tau v_\mathrm{a} \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\ .}$$

9 Le temps T est tel que l'avant de la luge se trouve à une distance L de l'entrée dans la zone de champ, soit

$$x(T) = L \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{e}^{-T/\tau} = 1 - \frac{L}{\tau v_\mathrm{a}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{T = -\tau \ln\left(1 - \frac{L}{\tau v_\mathrm{a}}\right) \simeq 35\,\mathrm{ms}\,.}$$

10 Comme $\mathrm{e}^{-T/\tau} = 1 - \dfrac{L}{\tau v_\mathrm{a}}$, alors

$$\boxed{v(T) = v_\mathrm{a} - \frac{L}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \Delta v = \frac{L}{\tau} = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

Ainsi, le lugeur est loin d'avoir ralenti suffisamment pour pouvoir utiliser ses pieds.

C - Mise en série de plusieurs zones magnétiques

11 Comme indiqué question 2, il n'y a plus d'induction, donc plus de force de Laplace induite, dès que la luge est entièrement dans la zone soumise à $\vec{B}$. Comme la luge n'est plus freinée, elle poursuit son mouvement à vitesse constante $v(T)$. Pour maximiser le freinage de la luge, il faut qu'elle commence à sortir de la zone magnétique dès qu'elle y est complètement entrée : la longueur idéale de la zone soumise au champ magnétique est donc **égale à la longueur L du cadre.**

12 Lorsque le cadre conducteur sort de cette zone, il est de nouveau le siège d'un phénomène d'induction. Tous les calculs précédents s'écrivent quasiment de la même façon : le cadre est soumis à une force

$$\vec{F}_\mathrm{L} = -\frac{\ell^2 B^2}{R_\mathrm{c}} v\,\vec{u}_x$$

et perd une vitesse

$$\Delta v = \frac{L}{\tau}\,.$$

13 Pour pouvoir bénéficier à plein de l'effet de freinage, il faut que la luge sorte totalement d'une zone magnétique avant d'entrer dans la suivante. La sortie d'une zone et l'entrée de la suivante doivent donc **être séparées de L**. Au total entre le début l'entrée et la sortie totale d'une zone magnétique le cadre perd une vitesse de $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Pour que la vitesse de la luge diminue jusqu'à $5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, il faut donc installer **cinq zones magnétiques successives**. Cela demande une longueur totale

$$\boxed{L_\mathrm{tot} = 5 \times 2L = 10\,\mathrm{m}\,.}$$