BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

DM 13 – à rendre lundi 5 février *Correction*

Résistances thermiques

I - Isolation et chauffage d'un appartement

PT B 2018

10 Pas évident de trouver suffisamment de commentaires pertinents à donner. En tout cas, je pense que pour une question de ce type il faut éviter de simplement décrire le document mais chercher à interpréter physiquement les données qui y figurent. Voici quelques idées :

- ▷ On constate sur le document 2 qu'interposer des couches d'air à l'intérieur des matériaux diminue assez nettement la conductance thermique surfacique (simple vs. double vitrage, mur plein vs. mur creux) ;
- ▷ On constate sur le document 3 que l'air sec est un isolant aussi performant que la laine de verre (tant qu'il n'y a pas de convection !), ce qui explique pourquoi les performances des murs creux et du double vitrage.
- ▷ On constate également que l'épaisseur ne fait pas tout en ce qui concerne l'isolation, les propriétés intrinsèques du matériau jouent aussi (polystyrène vs. mur).
- ▷ On peut aussi comprendre à la lecture de ce document pourquoi on ne fait pas de murs en cuivre ☺

11 Classique Un double vitrage est composé de deux couches de verre qui encadrent une couche d'air, voir figure 1. Les trois résistances thermiques sont associées en série, donc leur résistance s'ajoutent. La couche d'air est un très bon isolant thermique ($\lambda_{\text{air}} \simeq \lambda_{\text{laine verre}}$), donc de forte résistance thermique, ce qui permet de considérablement augmenter la résistance thermique de l'ensemble : ce gain correspond à une division par 2 de la conductance thermique surfacique.

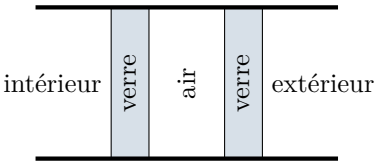

Figure 1 – Schéma d'un double vitrage.

12 La résistance thermique d'une paroi de surface $S = 1\,\text{m}^2$ est donnée par $R = 1/U_\text{w}S$, donc

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R} = U_\text{w} S\,\Delta T = 10\,U_\text{w}\ (\text{en W})\,.$$

> *Attention à ne pas oublier la surface. Ce n'est pas parce que $S = 1\,\text{m}^2$ qu'on peut remplacer S par 1 dans le calcul, sous peine de rendre les formules inhomogènes !*

L'énergie consommée s'en déduit

$$E = \Phi\,\Delta t = 40 U_\text{w}\ \ (\text{en kWh})\,,$$

et enfin le coût à partir du prix p d'un kWh,

$$\text{coût} = E \times p = 6 U_\text{w}\ (\text{en euros})$$

	Φ (W)	Énergie annuelle (kWh)	Coût annuel (euros)
Simple vitrage	60	240	36
Double vitrage	30	120	18

13 La démarche est identique concernant le mur non isolé. Pour le mur isolé, il faut calculer le coefficient de performance. Les matériaux sont montés en série donc

$$R_\text{tot} = R_\text{mur} + R_\text{PS} = \left(\frac{1}{U_\text{w,mur}} + \frac{1}{U_\text{w,PS}}\right)\frac{1}{S}$$

BY-NC-SA

On en déduit

$$U_{\mathrm{w,tot}} = \frac{U_{\mathrm{w,mur}}\,U_{\mathrm{w,PS}}}{U_{\mathrm{w,mur}} + U_{\mathrm{w,PS}}} = 2{,}5\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-2}}$$

	Φ (W)	Énergie annuelle (kWh)	Coût annuel (euros)
Mur non isolé	20	80	12
Mur isolé	4	16	2,4

L'économie réalisée est donc d'environ 10 € par m^2 ... sans parler du bilan carbone.

14a Les fenêtres orientées au sud reçoivent **davantage d'ensoleillement**, et permettent donc de chauffer l'appartement par rayonnement. Les fenêtres au nord ne bénéficiant pas de cet ensoleillement, on les fait petites pour limiter les pertes thermiques. Ce qui est un avantage en hiver devient un inconvénient en été par forte chaleur : les arbres à feuille caduques permettent d'**ombrager l'appartement en été** mais pas en hiver.

14b Schématiquement, l'effet des volets s'apparente à une résistance thermique supplémentaire montée en parallèle des murs et fenêtres. L'isolation est d'autant meilleure que le matériau est mauvais conducteur : il vaut donc mieux des **volets en bois** plutôt qu'en métal.

15 Cours Le volume d'air est

$$\boxed{V = 100 \times 2{,}5 = 250\,\mathrm{m}^3}$$

ce qui correspond à une masse

$$\boxed{m = \rho V = 300\,\mathrm{kg}\,.}$$

16a Cours Par définition,

$$C = mC_{P,\mathrm{m}} = 300\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}}\,.$$

16b On raisonne sur l'air de l'appartement pendant une transformation isobare de durée Δt.

Bilan d'enthalpie :

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}\,\Delta t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C\,\Delta T \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{C\,\Delta T}{\mathcal{P}} = 600\,\mathrm{s} = 10\,\mathrm{min}\,.}$$

16c Quiconque est déjà rentré de vacances en plein hiver sait que ce résultat n'est pas crédible ! La capacité thermique de l'appartement inclut aussi celle des murs et du mobilier qui sont nettement supérieures à celles de l'air car il s'agit de solides. Les pertes thermiques sont évidemment à prendre en compte également, mais ce n'est pas le facteur principal.

17a Pour une fenêtre simple vitrage,

$$\boxed{G_{\mathrm{sv}} = U_{\mathrm{w,sv}}S = 15\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

Pour une fenêtre double vitrage,

$$\boxed{G_{\mathrm{dv}} = U_{\mathrm{w,dv}}S = 7{,}5\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

17b Les quatre fenêtres sont soumises à la même différence de température entre leurs deux faces : elles sont donc **montées en parallèle**.

17c Les conductances se somment en parallèle, donc $G_{\mathrm{tot}} = 4G_{\mathrm{fen}}$ soit

$$\boxed{G_{\mathrm{tot,sv}} = 60\,\mathrm{W\cdot K^{-1}} \qquad \text{et} \qquad G_{\mathrm{tot,dv}} = 30\,\mathrm{W\cdot K^{-1}}\,.}$$

Lorsque $\Delta T = 10\,\mathrm{K}$,

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{sv}} = G_{\mathrm{tot,sv}}\,\Delta T = 600\,\mathrm{W} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{\mathrm{dv}} = G_{\mathrm{tot,dv}}\,\Delta T = 300\,\mathrm{W}\,.}$$

17d La puissance thermique totale perdue vaut 5Φ, ce qui nécessite donc des convecteurs de puissance

$$\boxed{\mathcal{P}_{0,\mathrm{sv}} = 3\,\mathrm{kW} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_{0,\mathrm{dv}} = 1{,}5\,\mathrm{kW}\,.}$$

BY-NC-SA

> *L'hypothèse de l'énoncé est absurde : remplacer du simple par du double vitrage est évidemment sans aucun impact sur le reste de la puissance perdue au travers des murs ... Supposer que la puissance perdue par les vitres représente toujours 20 % du total n'a donc aucun sens.*

Pour comparer, il faut convertir cette puissance en énergie annuelle consommée par m^2 d'appartement,

$$E_{\mathrm{sv}} = \frac{\mathcal{P}_{0,\mathrm{sv}} \times \Delta t}{S_{\mathrm{appt}}} = \frac{3 \times 4000}{100} = 120\,\mathrm{kW \cdot h \cdot m^{-2} \cdot an^{-1}}$$

et

$$E_{\mathrm{dv}} = \frac{\mathcal{P}_{0,\mathrm{dv}} \times \Delta t}{S_{\mathrm{appt}}} = \frac{3 \times 4000}{100} = 60\,\mathrm{kW \cdot h \cdot m^{-2} \cdot an^{-1}}$$

Ces résultats semblent conformes au document 1 : ils sont meilleurs que la moyenne ... mais on étudie un appartement très performant énergétiquement.

18 Compte tenu de la valeur de ΔT, augmenter la température de l'appartement de 1 °C revient à augmenter ΔT de 10 %, et comme la consommation est proportionnelle à ΔT, **elle augmente de 10 % également**, et ce quel que soit le vitrage.

II - Circuit d'eau chaude domestique

CCP MP 2015

II.B - Échangeur thermique

II.4.a Cours Difficile Les notations $d_{k'}$ et d_k désignent respectivement les **débits massiques** de fluide sur la sortie k' et l'entrée k. Les notations $h_{k'}$ et h_k désignent l'**enthalpie massique** à cette entrée et cette sortie. Enfin, la notation p_{u} désigne la **puissance utile** (puissance indiquée) et p_{th} la **puissance thermique algébriquement reçues** par l'ensemble des *deux* fluides au sein de l'échangeur.

Qualitativement, les termes $\sum_k d_k h_k$ et $\sum_{k'} d_{k'} h_{k'}$ représentent respectivement l'**enthalpie entrant et sortant du volume de contrôle par unité de temps à cause des échanges de matière**. Bien que le régime soit permanent, ces enthalpies sont différentes à cause des échanges énergétiques entre le fluide et son environnement à l'intérieur du volume de contrôle.

> *Rappelons que la puissance échangée entre les fluides au sein d'un échangeur double flux est une puissance interne, qui n'apparaît donc pas dans l'écriture du premier principe industriel.*

II.4.b Cours Appliquons le premier principe industriel à la zone active de l'échangeur, qui compte deux entrées de débit respectifs d_{e} et d_{g} et deux sorties aux mêmes débits. Il ne compte pas de pièce mobile ($p_u = 0$) et est globalement calorifugé ($p_{\mathrm{th}} = 0$). Ainsi, avec les notations de la figure 8 de l'énoncé,

$$(d_{\mathrm{g}} h_2 + d_{\mathrm{e}} h_4) - (d_{\mathrm{g}} h_1 + d_{\mathrm{e}} h_3) = 0 + 0$$
$$d_{\mathrm{g}}(h_2 - h_1) + d_{\mathrm{e}}(h_4 - h_3) = 0$$
$$\boxed{d_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}}(T_2 - T_1) + d_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}}(T_4 - T_3) = 0}$$

en utilisant la loi de Joule.

> *Il est aussi possible de traiter les deux fluides séparémment, en prenant alors en compte une puissance thermique interne $\Phi_{g\to e}$ fournie par l'eau glycolée à l'eau pure. Le premier principe appliqué à chaque fluide donne alors*
>
> $$d_g(h_2 - h_1) = -\Phi_{g\to e} \qquad \text{et} \qquad d_e(h_4 - h_3) = +\Phi_{g\to e}\,.$$
>
> *Sommer ces deux équations redonne heureusement le résultat ci-dessus.*

II.4.c D'après la question précédente,

$$\boxed{d_{\mathrm{e}} = -\frac{d_{\mathrm{g}} c_{\mathrm{g}}(T_2 - T_1)}{c_{\mathrm{e}}(T_4 - T_3)} = 13{,}1\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}\,.}$$

II.5.a Cours Le second principe pour un fluide en écoulement au travers d'un système ouvert s'écrit, avec les notations de l'énoncé,

$$\boxed{\sum_{k' \in \text{sortie}} d_{k'} s_{k'} - \sum_{k \in \text{entrées}} d_k s_k = \frac{\delta S_{\text{éch}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta S_{\mathrm{cr}}}{\mathrm{d}t} = \frac{p_{\mathrm{th}}}{T_{\mathrm{ext}}} + \sigma\,.}$$

BY-NC-SA

Ici, $s_{k'}$ et s_k désignent les entropies massiques du fluide à la sortie k' et l'entrée k, $\delta S_{\text{éch}}/\mathrm{d}t = p_{\text{th}}/T_{\text{ext}}$ est l'entropie échangée par les deux fluides avec l'extérieur par unité de temps et $\delta S_{\text{cr}}/\mathrm{d}t = \sigma$ est l'entropie totale créée au sein des deux fluides par unité de temps.

Qualitativement, les termes $\sum_k d_k s_k$ et $\sum_{k'} d_{k'} s_{k'}$ représentent respectivement l'entropie entrant et sortant du volume de contrôle par unité de temps à cause des échanges de matière. Bien que le régime soit permanent, ces entropies sont différentes à cause de la création d'entropie et des échanges thermiques entre le fluide et son environnement à l'intérieur du volume de contrôle.

II.5.b La zone active de l'échangeur est globalement calorifugée, donc $p_{\text{th}} = 0$. Le second principe écrit ci-dessus appliqué à la zone active de l'échangeur donne donc

$$d_{\text{g}}(s_2 - s_1) + d_{\text{e}}(s_4 - s_3) = 0 + \sigma$$

et en utilisant l'expression fournie de l'enthalpie massique, on obtient

$$\boxed{\sigma = d_{\text{g}} c_{\text{g}} \ln \frac{T_2}{T_1} + d_{\text{e}} c_{\text{e}} \ln \frac{T_4}{T_3} = 2{,}8\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.}$$

Trouver $\sigma > 0$ indique que le passage au travers de l'échangeur est irréversible, ce qui n'est pas une surprise étant donné que les deux fluides sont à des températures différentes : il y a donc inévitablement des inhomogénéités de température.

II.C - Isolation thermique d'une canalisation d'eau

II.6 Classique Par intégration sur la surface latérale entre la canalisation et l'eau intérieure,

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \iint_{\text{surf latérale}} \vec{j}_Q \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r = \iint_{\text{surf latérale}} h(T_{\text{i}} - T_0)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}_{\text{th}} = 2\pi\, h\, r_{\text{i}} L\,(T_{\text{i}} - T_0)\,.}$$

II.7 Classique L'échange conducto-convectif se fait cette fois entre l'extérieur de la gaine isolante et l'air. Par analogie avec ce qui précède,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{th,isolant}} = 2\pi\, h\, r_{\text{e}} L\,(T_{\text{e}} - T_0)\,.}$$

II.8.a Classique Raisonnons sur un cylindre creux de longueur L et de rayons r et $r + \mathrm{d}r$ pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$. Par la face située en r, il reçoit

$$\delta Q_{\text{e}} = P_{\text{cond}}(r)\,\mathrm{d}t\,,$$

et par la face située en $r + \mathrm{d}r$, il cède

$$\delta Q_{\text{s}} = P_{\text{cond}}(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t\,.$$

Il s'agit d'un solide indéformable, qui ne reçoit aucun travail. En régime stationnaire, le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\mathrm{d}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} \delta Q_{\text{e}} - \delta Q_{\text{s}} + \cancel{\delta W} \underset{\text{stat}}{\overset{\uparrow}{=}} 0\,.$$

On en déduit

$$P_{\text{cond}}(r)\,\mathrm{d}t - P_{\text{cond}}(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{donc} \qquad -\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}P_{\text{cond}}}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}P_{\text{cond}}}{\mathrm{d}r} = 0}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

II.8.b Raisonnons sur un cylindre creux de rayon interne r quelconque ($r_{\text{i}} < r < r_{\text{e}}$) et de rayon externe r_{e}. Par la face intérieure, il reçoit la puissance $P_{\text{cond}}(r)$ et par la face externe il cède par définition $\mathcal{P}_{\text{th,isolant}}$. Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on a

$$\mathrm{d}U \underset{\text{1er P}}{\overset{\uparrow}{=}} P_{\text{cond}}(r)\,\mathrm{d}t - \mathcal{P}_{\text{th,isolant}}\,\mathrm{d}t \underset{\text{stat}}{\overset{\uparrow}{=}} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{P_{\text{cond}}(r) = P_{\text{th,isolant}}\,.}$$

BY-NC-SA

> *Le résultat peut aussi se justifier par continuité du flux thermique à l'interface en $r = r_e$. En revanche, on ne peut pas affirmer sans justifier que $P_{th,isolant}$ est une « condition aux limites », car les mécanismes physiques (conduction pure contre conduction et convection) ne sont pas les mêmes.*

II.8.c Classique La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \vec{u}_r$$

car la conduction est supposée purement radiale. La puissance $P_{\text{cond}}(r)$ est la puissance sortant d'un cylindre de rayon r sur lequel $\vec{j}_{\text{cond}}$ est uniforme, d'où

$$\boxed{P_{\text{cond}}(r) = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r L\,.}$$

II.8.d Classique Ainsi,

$$-\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \times 2\pi r L = P_{\text{th,isolant}} = 2\pi\, h\, r_{\text{e}} L\,(T_{\text{e}} - T_0)$$

ce qui donne en simplifiant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda r}(T_0 - T_{\text{e}})\,.}$$

II.8.e Procédons par séparation des variables pour intégrer entre r_{i} et un rayon r quelconque,

$$\int_{T_{\text{i}}}^{T(r)} \mathrm{d}T = \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda}(T_0 - T_{\text{e}}) \int_{r_{\text{i}}}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{T(r) = T_{\text{i}} + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda}(T_0 - T_{\text{e}}) \ln \frac{r}{r_{\text{i}}}\,.}$$

II.8.f Appliquons le résultat précédent en $r = r_{\text{e}}$,

$$T_{\text{e}} = T_{\text{i}} + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda}(T_0 - T_{\text{e}}) \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}$$

Il vient alors

$$T_{\text{e}} \left(1 + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}\right) = T_{\text{i}} + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}} T_0 \quad -T_0 + T_0$$

$$T_{\text{e}} \left(1 + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}\right) = T_{\text{i}} - T_0 + \left(1 + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}\right) T_0$$

$$\boxed{T_{\text{e}} = T_0 + \frac{T_{\text{i}} - T_0}{1 + \dfrac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \dfrac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}}\,.}$$

> *Le résultat étant donné et le calcul un petit peu astucieux, il faut justifier un minimum la dernière étape du calcul pour que la réponse ne passe pas pour du bluff.*

II.9 D'après les questions II.6 et II.7,

$$\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th,isolant}}} = \frac{2\pi\, h\, r_{\text{i}} L\,(T_{\text{i}} - T_0)}{2\pi\, h\, r_{\text{e}} L\,(T_{\text{e}} - T_0)} = \frac{r_{\text{i}}(T_{\text{i}} - T_0)}{r_{\text{e}}(T_{\text{e}} - T_0)}$$

En reprenant la question II.8.f,

$$\frac{T_{\text{i}} - T_0}{T_{\text{e}} - T_0} = 1 + \frac{h r_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}\,,$$

BY-NC-SA

ce qui conduit à

$$\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th,isolant}}} = \frac{r_{\text{i}}}{r_{\text{e}}} \times \left(1 + \frac{hr_{\text{e}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}}\right) = \frac{r_{\text{i}}}{r_{\text{e}}} + \frac{hr_{\text{i}}}{\lambda} \ln \frac{r_{\text{e}}}{r_{\text{i}}} \,,$$

ce qui correspond bien à la forme donnée par l'énoncé,

$$\boxed{\frac{P_{\text{th}}}{P_{\text{th,isolant}}} = \frac{1}{x} + \alpha \ln x \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x = r_{\text{e}}/r_{\text{i}} \\ \alpha = \dfrac{hr_{\text{i}}}{\lambda} \end{cases}}$$

II.10.a L'isolant est efficace s'il permet de diminuer la puissance thermique cédée à l'air, c'est-à-dire si $P_{\text{th}}/P_{\text{th,isolant}} > 1$. Comme $r_{\text{e}} > r_{\text{i}}$, seule la partie $x > 1$ des courbes proposées est pertinente. Dans le cas du polyuréthane, on constate que **l'isolation est toujours efficace**.

II.10.b Au contraire, l'isolation au plâtre est inefficace pour des valeurs de x trop faible : il faut atteindre $x = 60$ pour obtenir $P_{\text{th}}/P_{\text{th,isolant}} > 1$ avec du plâtre. Cela donnerait $r_{\text{e}} = 60 r_{\text{i}}$, soit un diamètre externe de 2,40 m pour une canalisation de rayon 2 cm : **le plâtre est inutilisable** en pratique !

> *Pour $r_{\text{e}} < 60\, r_i$, on constate un résultat paradoxal : alors que l'épaisseur de matériau augmente, les pertes thermique augmentent également ! En fait, l'épaisseur n'est pas la seule grandeur géométrique à augmenter : c'est le cas aussi de la surface d'échange entre le plâtre et l'air. Pour les faibles valeurs d'épaisseur, c'est l'augmentation de surface d'échange qui l'emporte.*

II.10.c Posons $f(x) = 1/x + \alpha \ln x$. Alors,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} + \alpha \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\alpha - \frac{1}{x}\right) \,.$$

La dérivée s'annule en

$$x_{\text{m}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{hr_{\text{i}}} \,.$$

II.10.d Par lecture graphique sur la figure 12 de l'énoncé, $x_{\text{m}} = 4$ d'où

$$\boxed{\lambda = 4hr_{\text{i}} = 0{,}24\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \,.}$$

BY-NC-SA