



Remise en route

I - Autour des impédances complexes

- 1 La pulsation est reliée à la fréquence du signal par $\omega = 2\pi f$. La phase initiale étant nulle,

$$u(t) = U \cos(\omega t) = U \cos(2\pi f t).$$

- 2 L'association série de R et L a pour impédance équivalente

$$\underline{Z}_{RL} = R + jL\omega,$$

elle-même en association parallèle avec le condensateur. L'admittance \underline{Y} équivalente de l'ensemble vaut donc

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} + jC\omega \\ &= \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega \\ &= \frac{R - jL\omega}{(R + jL\omega)(R - jL\omega)} + jC\omega \\ &= \frac{R - jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2} + jC\omega\end{aligned}$$

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} + j\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + (L\omega)^2} \right).$$

Attention à la stratégie de calcul. Ici, compte tenu du résultat donné, il est fort peu judicieux de regrouper $jC\omega$ avec le reste de la fraction.

- 3 Le courant i_1 est celui qui alimente l'ensemble de l'association. Par définition de l'admittance,

$$\underline{I}_1 = \underline{Y} \underline{U}$$

avec \underline{I}_1 et \underline{U} les amplitudes complexes de $i_1(t)$ et $u(t)$. Ainsi,

$$\arg \underline{I}_1 = \arg \underline{Y} + \arg \underline{U}.$$

Les deux signaux sont donc en phase lorsque $\arg \underline{Y} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'admittance complexe \underline{Y} est réelle positive. C'est le cas lorsque sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire pour

$$C = \frac{L}{R^2 + (L\omega)^2} = 0,24 \mu\text{F}.$$

J'ai ici beaucoup plus détaillé le raisonnement que nécessaire. Vous pouvez directement partir de la condition « \underline{Y} réelle donc partie imaginaire nulle » pour que les signaux soient en phase.

- 4 En utilisant de même les amplitudes complexes,

$$\underline{I}_1 = \underline{Y} \underline{U} \quad \underline{I}_2 = jC\omega \underline{U} \quad \underline{I}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_{RL}} \underline{U} = \frac{1}{R + jL\omega} \underline{U}.$$

L'amplitude du signal réel est donné par le module de l'amplitude complexe. Compte tenu du choix de valeur de C , le courant $i_1(t)$ a donc pour amplitude

$$I_1 = |\underline{Y}| U = \frac{R}{R^2 + (L\omega)^2} U = 5,0 \text{ mA}.$$

Pour le courant $i_2(t)$,

$$I_2 = C\omega U = 7,7 \text{ mA}.$$

Enfin, pour le courant $i_3(t)$,

$$I_3 = \left| \frac{1}{R + jL\omega} \right| U \quad \text{soit} \quad I_3 = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} U = 9,1 \text{ mA}.$$

Rappelons que le module d'un complexe $\underline{z} = x + jy$ est défini par

$$|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y!!$$

En revanche, passer par une racine est complètement inutile (et franchement maladroit à notre niveau) si le complexe est imaginaire pur, ou pire s'il est réel.

5 La relation $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$ est bien sûr toujours valable : c'est la loi des nœuds. En revanche, la question précédente montre que ce n'est clairement pas le cas pour les amplitudes. Ce « paradoxe » s'explique par le fait que les courants sont déphasés les uns par rapport aux autres, l'amplitude de la somme n'a donc pas de raison d'être égale à la somme des amplitudes.

Dans un tout autre contexte, c'est un phénomène analogue qui explique les interférences. Superposer des ondes déphasées produit une onde résultante dont l'amplitude dépend du déphasage entre les deux ondes qui interfèrent.

II - Étude expérimentale d'un filtre RL

Le schéma équivalent du montage pour les deux modèles envisagés est représenté figure 1.

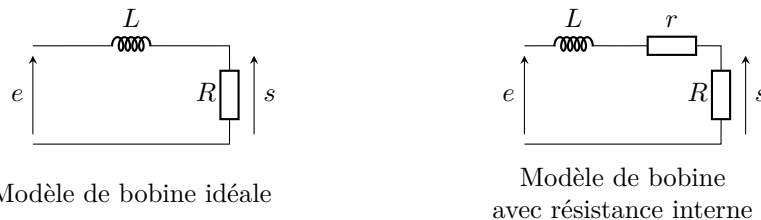


Figure 1 – Schéma du filtre réalisé pour les deux modèles de bobine.

Attention aux schémas qui doivent « avoir l'air d'un filtre ». En particulier, la tension d'entrée est sur la gauche du schéma, la tension de sortie sur la droite, ce qui a des conséquences sur la position de R et L . Attention également à la lecture de l'énoncé, la tension de sortie est mesurée aux bornes de la résistance, pas de la bobine.

6 Le schéma du montage est représenté figure 1. Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

ce qui permet d'identifier directement

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L}.$$

7 Dans la limite basse fréquence, $\omega \ll \omega_c$, donc

$$\underline{H} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} H_0 = 1 \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 20 \log 1 = 0.$$

Or on constate sur le diagramme expérimental que le gain dans la limite basse fréquence est de -2 dB : le modèle n'est donc **pas cohérent** avec les mesures.

8 En tenant compte de la résistance interne de la bobine, le montage devient celui de droite de la figure 1. Toujours avec un pont diviseur,

$$\underline{H} = \frac{R}{R+r+jL\omega} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1+j\frac{L}{R+r}\omega}$$

ce qui permet d'identifier

$$H_0 = \frac{R}{R+r} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R+r}{L}.$$

9 Dans la limite basse fréquence, rien ne change dans le calcul par rapport à la situation précédente mais $H_0 \neq 1$, donc

$$G_{\text{dB}} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 20 \log H_0.$$

Dans la limite haute fréquence,

$$\underline{H} \underset{\omega \gg \omega_c}{\sim} \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = -jH_0 \frac{\omega_c}{\omega}$$

d'où on déduit

$$G_{\text{dB}} \underset{\omega \gg \omega_c}{\sim} -20 \log \frac{\omega}{\omega_c} + 20 \log H_0.$$

Pourquoi garder ensemble ω et ω_c mais sortir H_0 ? Par habitude ! Il est fréquent de raisonner sur une pulsation réduite ω/ω_c . Cependant, ce n'est pas le cas ici, et séparer le log en trois morceaux plutôt qu'en deux est parfaitement correct.

À la pulsation ω^* où les deux asymptotes se coupent, on a

$$G_{\text{dB,BF}}(\omega^*) = G_{\text{dB,HF}}(\omega^*) \quad \text{soit} \quad 20 \log H_0 = -20 \log \frac{\omega^*}{\omega_c} + 20 \log H_0 \quad \text{d'où} \quad 20 \log \frac{\omega^*}{\omega_c} = 0$$

ce qui est le cas pour

$$\omega^* = \omega_c.$$

10 À partir de la limite basse fréquence, on trouve

$$20 \log H_0 = -2 \text{ dB} \quad \text{d'où} \quad H_0 = 10^{-2/20} \simeq 0,79$$

En reprenant l'expression de H_0 ,

$$(R+r)H_0 = R \quad \text{soit} \quad rH_0 = R - RH_0 \quad \text{d'où} \quad r = \frac{1-H_0}{H_0} R \simeq 13 \Omega.$$

Par ailleurs, en traçant figure 2 le diagramme de Bode avec les asymptotes, on constate qu'elles se coupent en $f^* = f_c = 4 \text{ kHz}$. On en déduit

$$L = \frac{R+r}{2\pi f_c} = 2,5 \text{ mH}.$$

Même si ce n'est pas la logique de l'énoncé, il est possible également de considérer un point particulier se trouvant sur l'asymptote, donc à suffisamment haute fréquence, par exemple 10^5 Hz .

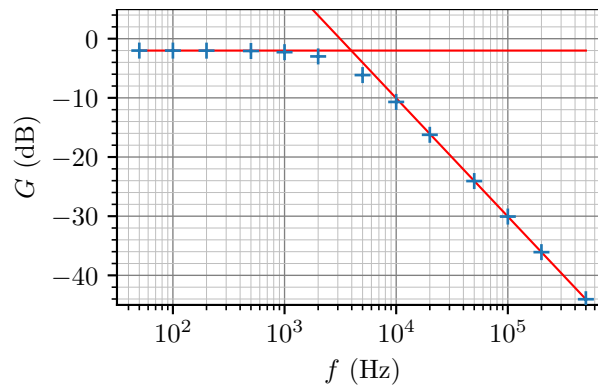


Figure 2 – Diagramme de Bode avec asymptotes.

III - Étude d'un filtre

PT A 2021

45 **Classique** L'admittance équivalente à l'association des trois dipôles en parallèle s'écrit

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega.$$

On en déduit la fonction de transfert du filtre, par un pont diviseur,

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{v_2}{v_1} = \frac{\underline{Z}}{R_0 + \underline{Z}} \\ &= \frac{1}{1 + \underline{Y} R_0} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R_0}{jL\omega} + \frac{R_0}{R} + jR_0C\omega} \\ &= \frac{1}{\frac{R + R_0}{R} + \frac{R_0}{jL\omega} + jR_0C\omega} \\ &= \frac{R/(R + R_0)}{1 + \frac{RR_0}{R + R_0} \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \right)} \end{aligned}$$

Attention à la simplicité des calculs : inutile de remettre l'impédance équivalente au même dénominateur si c'est pour tout re-simplifier et n'utiliser que l'admittance sous forme d'une somme.

Par identification avec la forme canonique donnée dans l'énoncé, on en déduit

$$\boxed{H_0 = \frac{R}{R + R_0}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} jQ_F \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{RR_0}{R + R_0} jC\omega \\ Q_F \frac{\omega_0}{j\omega} = \frac{RR_0}{R + R_0} \frac{1}{jL\omega} \end{cases}$$

Le produit des deux relations précédentes conduit à

$$Q_F^2 = \left(\frac{RR_0}{R + R_0} \right)^2 \frac{C}{L} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q_F = \frac{RR_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}},$$

et le quotient donne

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}.$$

46 **Cours** La bande passante du filtre est liée à sa fréquence propre et au facteur de qualité par

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q}}.$$

47 **Classique** • **Limite basse fréquence :**

$$\underline{H}_{BF} \sim \frac{H_0}{-jQ_F/x} = \frac{jxH_0}{Q_F} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} \sim_{BF} 20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q_F} \simeq 20 \log x - 24$$

puisque

$$\log \frac{H_0}{Q_F} = \log H_0 - \log Q_F = \log \frac{2}{10} - \log 3 = \log 2 - \log 10 - \log 3 = 0,3 - 1 - 0,5 = -1,2.$$

• **Limite haute fréquence :**

$$\underline{H}_{HF} \sim \frac{H_0}{jQ_F x} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} \sim_{HF} -20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q_F} \simeq -20 \log x - 24.$$

• **Valeur à la résonance :**

$$\underline{H}(f=f_0) = H_0 = 0,2 \quad \text{d'où} \quad G_{dB}(f=f_0) = 20 \log H_0 = -14 \text{ dB}.$$

Le tracé est représenté figure 3.

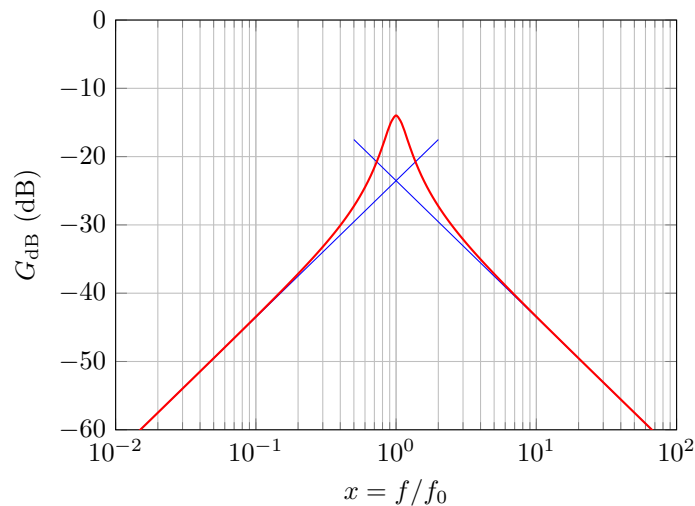


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre.

Le tracé du diagramme de Bode doit être justifié, et pas seulement parachuté. Ce qui pourrait être understandable pour des questions de temps dans un sujet d'écrit (mais qui ne rapporterait à mon avis qu'une petite partie des points) ne l'est pas dans un DM.