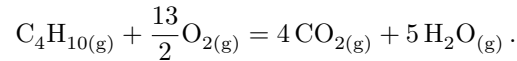




Transitoire thermique

Vider une casserole par ébullition

1 Par définition,



D'après la loi de Hess,

$$\Delta_r H^\circ = 4 \Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) + 5 \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_f H^\circ(\text{C}_4\text{H}_{10}) - \frac{13}{2} \times 0 = -2656 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

2 Lorsque n mol de butane sont consommées, l'avancement final de la transformation est également égal à n mol. La transformation étant isotherme, le bilan d'enthalpie du butane au cours de cette transformation s'écrit

$$\Delta H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} -Q_{\text{lib}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{=} n \Delta_r H^\circ \quad \text{soit} \quad Q_{\text{lib}} = -n \Delta_r H^\circ.$$

3 Raisonnons sur une durée infinitésimale dt . La masse de butane libérée par la bouteille vaut $dm = D_m dt$, ce qui correspond à une quantité de matière

$$dn = \frac{D_m dt}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}}$$

Supposons que la totalité de cette quantité de matière est consommée par la réaction de combustion. D'après la question précédente, cela libère une énergie

$$\delta Q_{\text{lib}} = -\frac{D_m dt}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}} \Delta_r H^\circ$$

La casserole ne recevant que la moitié de cette énergie,

$$\mathcal{P}_0 dt = \frac{\delta Q_{\text{lib}}}{2} = -\frac{D_m dt}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}} \Delta_r H^\circ \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_0 = -\frac{D_m}{2 M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}} \Delta_r H^\circ = 3 \text{ kW}.$$

Considérer une transformation infinitésimale n'est pas indispensable : il est possible également de raisonner sur une transformation finie, ou directement avec les puissances. Par ailleurs, le lien avec le débit massique doit être clairement expliqué et ne pas ressembler à une arnaque.

4 Puisque $T > T_0$, alors c'est bien sûr la casserole qui cède de la chaleur à l'air environnant ... et dans ce cas $\mathcal{P}_{\text{air}} > 0$: on en déduit que \mathcal{P}_{air} est la **puissance cédée**.

Autre présentation du raisonnement (même si je ne conseille pas forcément de le rédiger comme ça) : on connaît physiquement le sens réel de l'échange, de la casserole vers l'air, et avec l'expression donnée $\mathcal{P}_{\text{air}} > 0$, c'est donc que le sens réel est le même que le sens conventionnel, d'où \mathcal{P}_{air} puissance cédée par la casserole.

5 Procédons à un bilan enthalpique infinitésimal pour la casserole d'eau au cours de la phase de chauffage.

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} mc dT \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \mathcal{P}_0 dt - \mathcal{P}_{\text{air}} dt \quad \text{donc} \quad mc \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}_0 - \alpha(T - T_0)$$

et finalement

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\alpha}{mc} T = \frac{\mathcal{P}_0}{mc} + \frac{\alpha}{mc} T_0.$$

Raisonner sur une transformation infinitésimale est, comme à chaque fois, équivalent à raisonner directement sur les puissances.

6 La température T_∞ atteinte en régime permanent, c'est-à-dire la solution particulière de cette équation différentielle, doit être supérieure à la température d'ébullition de l'eau,

$$T_\infty = \frac{\mathcal{P}_0}{\alpha} + T_0 > T_{\text{éb}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P}_0 > \alpha(T_{\text{éb}} - T_0) = 480 \text{ W},}$$

ce qui est bien le cas.

Penser aux tests de vraisemblance pour valider l'expression : T_∞ est d'autant plus élevée que la puissance de chauffe \mathcal{P}_0 l'est, et si on ne chauffe pas ($\mathcal{P}_0 = 0$) alors la température de l'eau finira par atteindre celle de l'air.

Attention à ne pas se méprendre : l'équation différentielle, et donc sa solution, ne sont valables que tant que l'eau ne bout pas. Ainsi, même si $T_\infty > T_{\text{éb}}$, cette solution particulière ne sera en fait jamais atteinte.

7 L'équation différentielle précédente se résout en

$$T(t) = T_\infty + A e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mc}{\alpha}.$$

À l'instant initial, on peut supposer l'eau en équilibre thermique avec l'air, donc

$$T(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{T_0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{T_\infty} + A$$

et ainsi

$$T(t) = (T_0 - T_\infty) e^{-t/\tau} + T_\infty = \frac{\mathcal{P}_0}{\alpha} (1 - e^{-t/\tau}) + T_0.$$

La phase de préchauffage dure de l'instant $t = 0$ jusqu'à $t = t_1$ tel que $T = T_{\text{vap}}$. Ainsi,

$$T_{\text{vap}} = (T_0 - T_\infty) e^{-t_1/\tau} + T_\infty \quad \text{soit} \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{T_{\text{vap}} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{t_1 = \tau \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T_{\text{éb}} - T_\infty} = -\tau \ln \left(1 - \frac{\alpha}{\mathcal{P}_0} (T_{\text{éb}} - T_0) \right) = 121 \text{ s.}}$$

La condition initiale n'est (volontairement) pas donnée : c'est à vous de faire une hypothèse raisonnable.

Penser à tester la vraisemblance du résultat : en grands cuiseurs de pâtes que vous êtes, vous ne pouvez pas écrire sans réagir que le temps nécessaire pour faire bouillir une casserole d'eau est de quelques secondes ou de quelques années!!

8 Lorsqu'une masse $dm > 0$ se vaporise, la hauteur d'eau dans la casserole diminue, donc $d\ell < 0$. Le volume initialement occupé par la masse dm est $S |d\ell|$, d'où

$$\boxed{dm = -\rho S d\ell.}$$

9 Procédons à un bilan d'enthalpie pendant une durée infinitésimale dt au cours de la phase d'ébullition, où la température de l'eau est constante égale à $T_{\text{éb}}$. Le bilan d'enthalpie s'écrit

$$dH = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\mathcal{P}_0 dt} - \alpha(T_{\text{éb}} - T_0) dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{-\rho S d\ell \Delta_{\text{vap}} h}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = -\frac{1}{\rho S \Delta_{\text{vap}} h} [\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_a)].}$$

10 La phase d'ébullition commence à l'instant $t = t_1$, où la hauteur d'eau est égale à sa valeur initiale ℓ_0 . En intégrant par séparation des variables,

$$\int_{\ell_0}^0 d\ell = -\frac{1}{\rho S \Delta_{\text{vap}} h} [\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_a)] \int_{t_1}^{\Delta t} dt$$

d'où

$$-\ell_0 = -\frac{1}{\rho S \Delta_{\text{vap}} h} [\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_a)] (\Delta t - t_1)$$

soit finalement

$$\Delta t = t_1 + \frac{\rho S \ell_0 \Delta_{\text{vap}} h}{\mathcal{P}_0 - \alpha(T_{\text{éb}} - T_a)} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ s} = 17 \text{ min.}$$

On constate que l'ébullition totale de la casserole prend nettement plus de temps que d'atteindre la température d'ébullition : on retrouve le fait qu'un changement d'état met en jeu bien plus d'énergie qu'un changement de température.

Ne pas oublier la première phase dans le calcul de Δt .

Le calcul numérique ne nécessite pas de calculer explicitement ℓ_0 : le terme $\rho S \ell_0$ correspond à la masse initiale contenue dans la casserole, à savoir 1 kg.

11 Le débit massique de $130 \text{ mg} \cdot \text{s}^{-1}$ étant constant pendant toute la durée Δt , la masse totale de butane consommée est donc

$$m_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}} = D_m \Delta t = 130 \text{ g.}$$

La bouteille de randonnée suffit, mais sera sérieusement entamée.

12 La quantité de matière de butane consommée, égale à l'avancement final de la réaction de combustion, vaut donc

$$n_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}} = \frac{m_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}}}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}}.$$

D'après l'équation bilan (ou un tableau d'avancement, si nécessaire), on en déduit la quantité de matière de vapeur d'eau produite,

$$n_{\text{H}_2\text{O},\text{tot}} = 5n_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}} = 5 \frac{m_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}}}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}},$$

puis la masse

$$m_{\text{H}_2\text{O},\text{tot}} = 5 \frac{m_{\text{C}_4\text{H}_{10},\text{tot}}}{M_{\text{C}_4\text{H}_{10}}} M_{\text{H}_2\text{O}} = 201 \text{ g.}$$

On constate que cette masse n'est pas du tout négligeable devant la masse d'eau évaporée.