BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

DM 7 – à rendre lundi 18 novembre *Correction*

Statique des fluides
Thermodynamique différentielle

Effet de foehn en montagne

adapté ATS 2022

A - Gradient adiabatique sec

1 Difficile D'après l'identité thermodynamique en enthalpie, appliquée à l'élévation adiabatique réversible du volume $\mathcal{V}$ de composition constante,

$$\mathrm{d}H = T\cancel{\mathrm{d}S} + V\,\mathrm{d}p$$
$$C_p\,\mathrm{d}T = nRT\frac{\mathrm{d}p}{p}$$

D'après la relation de Mayer, $C_p - C_V = nR$, donc

$$C_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - (C_p - C_V)\frac{\mathrm{d}p}{p} = 0$$

et par définition $C_P = \gamma C_V$, d'où

$$\gamma\cancel{C_V}\frac{\mathrm{d}T}{T} - (\gamma\cancel{C_V} - \cancel{C_V})\frac{\mathrm{d}p}{p} = 0$$

et ainsi

$$\boxed{\gamma\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + (1-\gamma)\frac{\mathrm{d}p}{p} = 0\,.}$$

2 En isolant $\mathrm{d}T$ dans la relation précédente, on obtient

$$\mathrm{d}T = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T}{p}\,\mathrm{d}p\,.$$

Or d'après l'équation d'état appliquée à n mol d'air

$$\frac{T}{p} = \frac{V}{nR} = \frac{V\,M}{m\,R} = \frac{M}{R\rho}$$

En divisant de plus par $\mathrm{d}z$, on en déduit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{M}{R\,\rho(z)}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\,.}$$

3 Cours L'équilibre mécanique de l'atmosphère se traduit par la relation de la statique des fluides. L'axe z étant orienté vers le haut,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g\,.}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\rho(z)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -g$$

si bien que l'on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{M}{R}\,g\,.}$$

4 Numériquement,

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{-0{,}4}{1{,}4} \times \frac{29\cdot10^{-3}\times 9{,}8}{8{,}3} \simeq -\frac{4}{14}\times\frac{28}{8}\times\frac{10^{-3}}{10^{-1}} = -0{,}5\times 2\times 10^{-2} = -0{,}01\,\mathrm{K\cdot m^{-1}}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = -10\,\mathrm{K\cdot km^{-1}}\,.}$$

B - Effet des précipitations

> *Pour bien se repérer dans les signes, ne pas hésiter à faire au moins au brouillon le diagramme des échanges : même s'il est ici très simple, raisonner sur deux systèmes différents peut vite devenir source de confusion.*
>
> $$\boxed{\textit{eau}} \xrightarrow{Q} \boxed{\textit{air}}$$

5 **Classique** Raisonnons d'abord sur l'eau, et procédons au bilan d'enthalpie lors de la liquéfaction de la masse m_{vap}, associée à un transfert thermique Q cédé par l'eau à l'air :

$$\Delta H_{\text{eau}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} -Q \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transf}}}{=} -m_{\text{vap}}\,L_{\text{vap}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q = m_{\text{vap}}\,L_{\text{vap}}\,.}$$

6 **Classique** Raisonnons maintenant sur l'air, qui reçoit le transfert thermique Q :

$$\Delta H_{\text{air}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} +Q \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transf}}}{=} m_{\text{air}}\,c_p\,\Delta T \qquad \text{donc} \qquad \Delta T = \frac{Q}{m_{\text{air}}c_p} = \frac{m_{\text{vap}}\,L_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}c_p} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta T = \frac{r\,L_{\text{vap}}}{c_p}\,.}$$

> *Le raisonnement en deux temps est celui proposé par le sujet dont je me suis inspiré, mais je le trouve moyennement rigoureux, car il suppose que l'eau évolue de manière isotherme alors que l'air se réchauffe ... et que les goutelettes d'eau formées restent en suspension. Je pense qu'il aurait été plus judicieux de raisonner sur un système constitué d'air humide (masses $m_{air} \gg m_{vap}$) en évolution adiabatique. En raisonnant sur une transformation en deux étapes où l'eau se liquéfie puis la température augmente, le bilan d'enthalpie s'écrit*
>
> $$\Delta H \underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er P}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{transf}}}{=} -m_{\text{vap}}L_{\text{vap}} + (m_{\text{air}}c_{\text{air}} + m_{\text{vap}}c_{\text{eau,liq}})\Delta T$$
>
> *d'où on déduit*
>
> $$\Delta T = \frac{m_{\text{vap}}L_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}c_{\text{air}} + m_{\text{vap}}c_{\text{eau,liq}}} \simeq \frac{m_{\text{vap}}L_{\text{vap}}}{m_{\text{air}}c_{\text{air}}}$$
>
> *car $m_{air} \gg m_{vap}$, ce qui redonne bien le résultat.*

7 Par lecture de l'abaque, on trouve

$$\boxed{r = 10\,\mathrm{g\cdot kg^{-1}}\,.}$$

Ainsi,

$$\Delta T = \frac{10\cdot10^{-3}\times 2{,}3\cdot10^{6}}{1\cdot10^{3}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\Delta T = 23\,\mathrm{K}\,.}$$

C - Effet de foehn

8 **Cadeau** Le modèle prévoit un gradient adiabatique sec de $-10\,\mathrm{K\cdot km^{-1}}$. Ainsi, l'air se trouvant à $T_A = 15\,°\mathrm{C}$ au pied de la montagne voit sa température passer à $T_B = 5\,°\mathrm{C}$ lorsqu'il atteint le sommet à $1000\,\mathrm{m}$ d'altitude.

9 **Cadeau** Réciproquement, l'air atteint le point C à la température $T_C = T_A = 15\,°\mathrm{C}$.

> *Cela n'est pas particulièrement surprenant compte tenu de l'hypothèse adiabatique réversible du modèle*

> *utilisé. On pourrait retrouver ce résultat directement avec la loi de Laplace,*
>
> $$P_A^{1-\gamma} T_A^{\gamma} = P_C^{1-\gamma} T_C^{\gamma}$$
>
> *conduit directement à $T_C = T_A$ puisque $z_A = z_C$ donc $P_A = P_C$.*

10 Il n'y a pas davantage d'effet lié à la détente-compression entre A et C, mais comme la vapeur d'eau stockée dans l'air s'est liquéfiée, alors la température de l'air a augmenté de ΔT, donc

$$\boxed{T_C = T_A + \Delta T = 38\,°\mathrm{C}\,,}$$

on retrouve bien une température nettement plus élevée en C qu'en A, ce qui est **conforme à la phénoménologie** de l'effet de foehn.

> *Cet ordre de grandeur peut paraître impressionnant ... mais l'effet de foehn a lui-même des conséquences impressionnantes. Ainsi, lorsque le vent de foehn se lève, la température peut augmenter de 10 °C en quelques minutes ! Du côté des records, des écarts de température de 30 °C entre les deux versants ont déjà été constatés. Par ailleurs, l'effet de foehn a aussi un effet sur le régime de précipitations, puisque celles-ci sont bloquées sur l'un des deux versants : en plusieurs endroits, elles peuvent aller du simple au triple.*