



BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

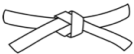



DM 9 – à rendre mercredi 4 décembre

Condensateur

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.



Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 4
	Ceinture jaune	Questions 1 à 7
	Ceinture rouge	Questions 1 à 12
	Ceinture noire	En entier

Supercondensateur

Document 1 :

Le secteur des transports représente environ un tiers des émissions de CO₂ cumulées à l'échelle de la France : le décarboner est donc prioritaire pour lutter contre le réchauffement climatique. En plus d'un indispensable changement de certains usages (transport ferroviaire plutôt que routier, covoiturage ou vélo plutôt que voiture individuelle, etc.), l'électrification des véhicules est incontournable.

Parmi la palette de solutions à développer, les supercondensateurs ont un rôle intéressant à jouer. Ces condensateurs un peu particuliers sont en effet conçus pour stocker et restituer rapidement de l'énergie électrique, en quantité bien supérieure aux condensateurs usuels, et avec des temps de réponse et des puissances échangées bien meilleurs que ce que permettent les batteries électrochimiques classiques. En contrepartie, la quantité d'énergie stockée est inférieure à celle de ces batteries.



Les supercondensateurs peuvent alors être utilisés comme réservoir tampon d'énergie, autorisant une recharge partielle mais plus rapide des batteries : l'énergie est d'abord stockée dans le supercondensateur, puis transmise à la batterie lorsque le véhicule roule. Des lignes de transport en commun à supercondensateurs (tram T3 parisien, réseau de bus de l'aéroport de Nice, etc.) ont également été développées selon un principe appelé bibe-ronnage : le supercondensateur est rechargé en quelques dizaines de secondes à chaque station, ce qui confère au véhicule suffisamment d'énergie pour parcourir la distance jusqu'à l'arrêt suivant.

À la différence d'un condensateur usuel, les deux électrodes d'un supercondensateur ne sont pas séparées par un isolant mais par un électrolyte, c'est-à-dire une solution contenant des ions. Lorsque le condensateur est déchargé, les ions sont répartis aléatoirement dans la solution. En revanche, lorsqu'il est chargé, les ions négatifs sont attirés vers l'électrode portant une charge positive et réciproquement, ce qui conduit à une accumulation d'ions au voisinage de l'électrode formant une *double couche électrochimique*, voir partie gauche de la figure 1. Ce faisant, tout se passe comme si l'électrode et sa double couche formaient un condensateur dont les « électrodes » sont extrêmement proches, ce qui permet d'augmenter la capacité.

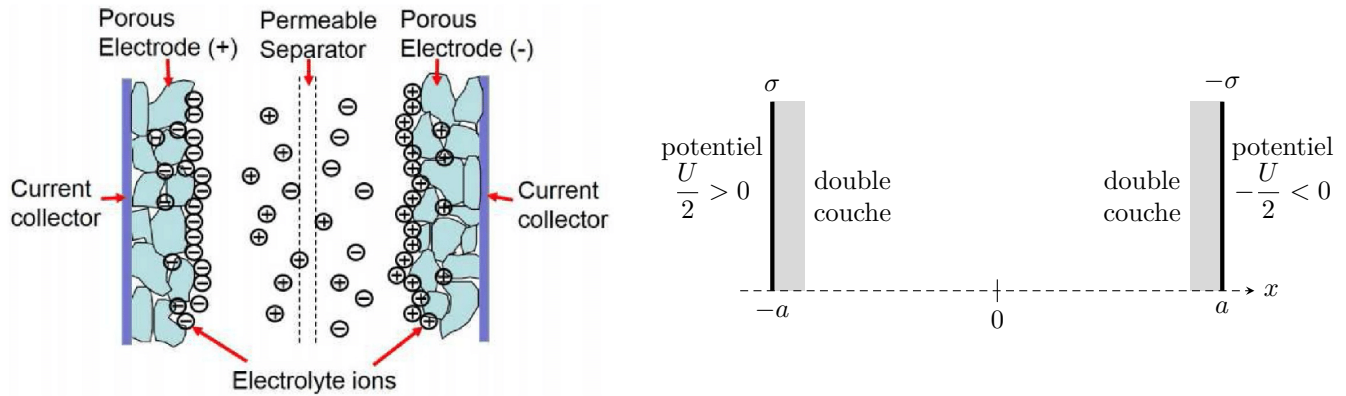


Figure 1 – Schéma de principe et modélisation du supercondensateur. En pratique, les électrodes sont poreuses pour maximiser la charge de la double couche. La membrane séparatrice perméable aux ions a pour rôle d'empêcher tout court-circuit par contact accidentel des électrodes. Ces deux aspects ne seront pas discutés dans ce sujet.

Dans toute la suite, on considère le supercondensateur comme un système purement unidimensionnel d'axe (Ox) , de surface transverse S parfaitement plane et de longueur totale $2a$, voir partie droite de la figure 1. Deux modèles seront envisagés pour la répartition des charges dans la double couche électrochimique. L'électrode positive, en $x = -a$ est portée au potentiel $U/2$, alors que l'électrode négative, en $x = a$, se trouve au potentiel $-U/2$. Les propriétés électromagnétiques du solvant de l'électrolyte sont analogues à celles du vide, mais avec une permittivité diélectrique $\varepsilon_0\varepsilon_r$ au lieu de ε_0 .

A - Capacité du supercondensateur

On suppose dans cette partie que la double couche électrochimique est suffisamment fine pour être modélisée par une distribution surfacique de charge σ' , distante des électrodes d'une distance $\delta \ll a$, comme schématisé figure 2. En pratique, δ est typiquement comprise entre 0,3 et 1 nm là où a peut difficilement être inférieure au micron. Ce modèle est appelé *modèle de Helmholtz*.

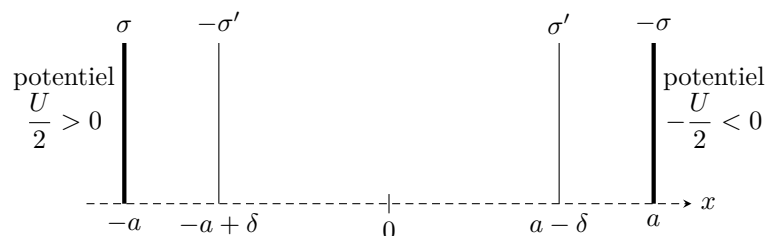


Figure 2 – Supercondensateur avec double couche parfaitement surfacique.

1 - Donner sans démonstration le champ électrique créé par chacun des quatre plans formant la distribution de charge. En déduire que le champ électrostatique dans le supercondensateur vaut

$$\begin{cases} \vec{E}(-a < x < -a + \delta) = \vec{E}(a - \delta < x < a) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \vec{e}_x \\ \vec{E}(-a + \delta < x < a - \delta) = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \vec{e}_x \end{cases}$$

2 - En déduire que

$$U = \frac{2a}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \sigma'.$$

Indication : il n'est pas nécessaire de calculer le potentiel $V(x)$ pour tout x .

3 - Justifier qualitativement qu'en régime permanent on a nécessairement $\sigma = \sigma'$. Simplifier en conséquence la relation précédente.

4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée dans le supercondensateur en régime permanent. En déduire l'expression de la capacité C du supercondensateur.

Pour comprendre l'intérêt de la double couche électrochimique, comparons cette capacité C à la capacité C_0 d'un condensateur de même largeur $2a$ dans lequel l'espace inter-armatures serait isolant.

5 - Donner l'expression de C_0 en justifiant brièvement.

6 - Estimer le rapport C/C_0 . Conclure.

7 - Les électrodes ont ici été supposées parfaitement planes, or elles sont plutôt réalisées dans des matériaux poreux. Quel en est l'intérêt ?

B - Structure de la double couche électrochimique

Cette seconde partie a pour but d'estimer l'épaisseur de la double couche électrochimique par un premier modèle, appelé *modèle de Gouy-Chapman*. Les ions y sont soumis à une force qui les attire vers l'électrode, mais aussi à l'agitation thermique, qui peut les en éloigner : il y a donc compétition entre ces deux phénomènes. Pour simplifier, on suppose que l'électrolyte ne compte que deux types d'ions, de charge $\pm q$. On admet que la densité volumique de cations n_+ et d'anions n_- dans l'électrolyte (nombre d'ions par unité de volume) vérifie

$$n_+(x) = n_0 \exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_-(x) = n_0 \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right)$$

où $V(x)$ est le potentiel électrostatique, k_B la constante de Boltzmann (reliée à la constante des gaz parfaits et au nombre d'Avogadro par $k_B = R/\mathcal{N}_A$) et T la température.

8 - Montrer que la densité volumique de charge dans l'électrolyte s'écrit

$$\rho(x) = -2n_0 q \sinh\left(\frac{qV(x)}{k_B T}\right)$$

Par la suite, on suppose que pour tout x , $qV(x) \ll k_B T$: bien que non valable au voisinage immédiat des électrodes, cette hypothèse nous permettra de comprendre qualitativement la physique pertinente avec des calculs faisables à la main.

9 - Montrer que dans ces hypothèses le potentiel V vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} V = 0.$$

où δ est une longueur caractéristique à déterminer.

10 - Montrer que l'on a alors

$$V(x) = -\frac{U \sinh(x/\delta)}{2 \sinh(a/\delta)}.$$

Pour obtenir un ordre de grandeur de δ , supposons $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $\varepsilon_r = 10$. La concentration de l'électrolyte est prise égale à $\mathcal{C} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, la température de 300 K.

11 - Exprimer n_0 en fonction de \mathcal{C} notamment. Calculer sa valeur numérique.

12 - En déduire la valeur numérique de δ . Commenter.

13 - Exprimer la densité volumique de charge $\rho(x)$. Que vaut-elle pour $|x| \ll a$? La représenter graphiquement de manière qualitative, en faisant apparaître explicitement la longueur δ sur votre figure.

14 - Conclure : l'approximation de la partie précédente supposant la distribution surfacique est-elle raisonnable ?