



Thermodynamique PT 2020

Étude d'un réseau urbain de chaleur

Flasher (ou cliquer sur) ce code
pour accéder au rapport officiel
sur le site de la banque PT.



Partie 1

1 **Cours** L'identité thermodynamique s'écrit

$$du = T ds - P dv.$$

Pour un liquide incompressible, $dv = 0$ et $du = c_{\text{eau}} dT$ d'où

$$c_{\text{eau}} dT = T ds.$$

Ainsi, une transformation isentropique ($ds = 0$) est forcément isotherme ($dT = 0$).

2 **Classique** Le cycle est représenté figure 1.

Justifications :

- ▷ B est sur la même isotherme que A , la pression $P_B = 40$ bar est connue ;
- ▷ C est sur la courbe d'ébullition (liquide saturant) avec $P_C = P_B = 40$ bar ;
- ▷ D est sur la courbe de rosée (vapeur saturante sèche) avec $P_D = P_C = 40$ bar ;
- ▷ E se trouve sur l'isotherme 375°C à $P_E = P_D = 40$ bar ;
- ▷ F se trouve la même isentrope que E (détente isentropique dans la turbine) avec $P_F = P_A = 1,0$ bar.

États		Pression (bar)	Température ($^\circ\text{C}$)	h ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)
A	Entrée compresseur	1,0	25	100
B	Entrée économiseur	40	25	105
C	Entrée ballon	40	250	1080
D	Entrée surchauffeur	40	250	2800
E	Entrée turbine	40	375	3150
F	Entrée condenseur	1,0	100	2430

Il n'est pas précisé sur le diagramme que l'ordonnée correspond à la pression ... mais c'est écrit dans le texte de l'énoncé, et tout le monde aura reconnu un diagramme des frigoristes.

D'autre part, le point F ne peut pas être placé très précisément car il manque la fin de l'isentrope $s = 7,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ à droite de E pour pouvoir faire l'interpolation correctement. J'ai ici un peu triché pour que les applications numériques de la suite s'accordent bien avec les données numériques de l'énoncé.

3 L'identité thermodynamique s'écrit

$$dh = T ds + v dP.$$

L'étape $A \rightarrow B$ est isentropique ($s = \text{cte}$) et concerne un liquide incompressible ($v = \text{cte}$), donc par intégration

$$h_B - h_A = v(P_B - P_A).$$

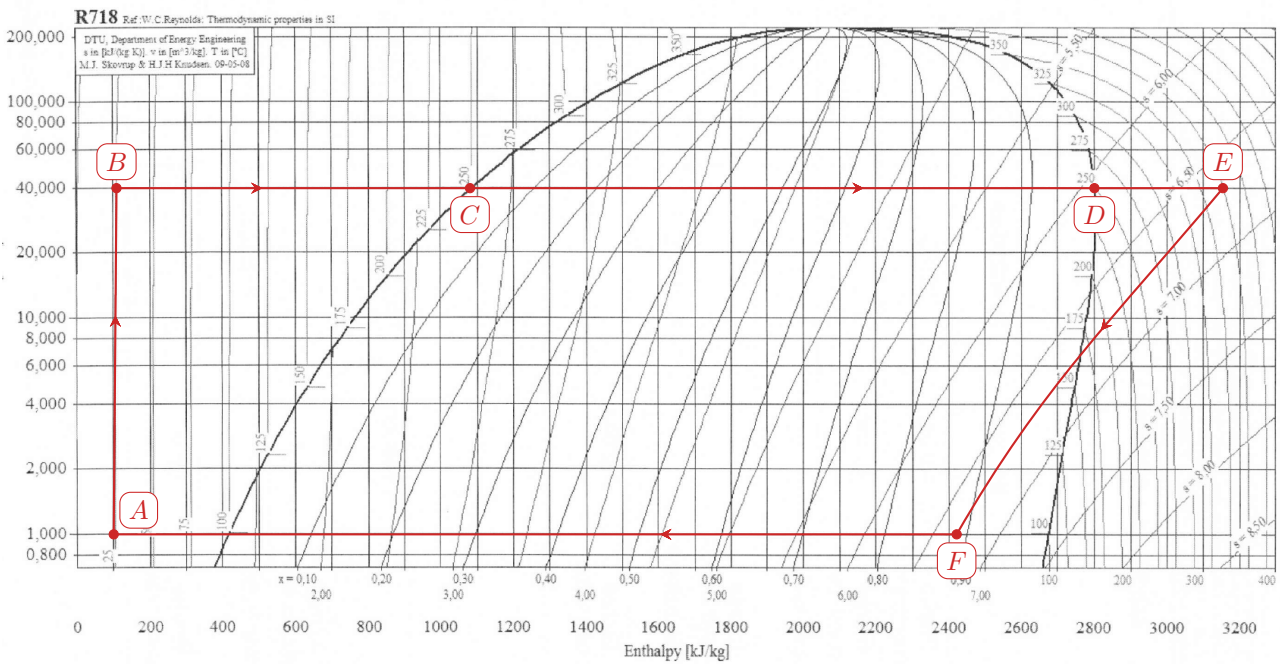


Figure 1 – Cycle en diagramme des frigoristes.

Supposons l'étape $A \rightarrow B$ adiabatique réversible. Alors, d'après le premier principe industriel appliqué à cette même étape,

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\ll \Delta h} = w_{AB} + \underbrace{q_{AB}}_{\text{adiab}} \quad \text{d'où} \quad h_B - h_A = w_{AB}.$$

Par identification des deux expressions, et en introduisant la masse volumique,

$$w_{AB} = v(P_B - P_A) \quad \text{d'où} \quad w_{AB} = \frac{P_B - P_A}{\rho_{\text{eau}}} = 3,9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Rappelons que adiabatique + réversible \implies isentropique, mais que la réciproque n'est pas vraie en général ... même si c'est ici l'hypothèse naturelle sous-entendue par l'énoncé. Par exemple, un mur en régime stationnaire évolue de manière isentropique (puisque le régime est stationnaire, l'entropie du mur ne varie pas) mais ni adiabatique (il y a des transferts thermiques avec l'air intérieur et extérieur) ni réversible.

Par ailleurs, faites attention à la rigueur de votre démonstration. L'identité thermodynamique concerne des différentielles d et n'a en général aucune raison de s'écrire avec des variations Δ ... sauf cas particulier comme ici. De plus, les deux versions du premier principe ne doivent pas être confondues. Dans le premier principe des systèmes fermés, la différence d'enthalpie dh ou ΔH est une variation entre un état initial et un état final, donc une variation dans le temps. En revanche, dans le premier principe des systèmes ouverts, aussi appelé premier principe industriel, la différence d'enthalpie est un écart entre l'entrée et la sortie du système. La façon d'écrire les travaux ne peut donc pas être la même, et il ne faut pas confondre le travail massique avec un travail reçu entre deux instants.

4 Cours L'économiseur, le ballon et le surchauffeur peuvent être assimilés à des échangeurs dans lesquels le fluide est au contact des chaudières. D'après le premier principe industriel appliqué entre l'entrée de l'économiseur B et la sortie du surchauffeur E ,

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\ll \Delta h} = \underbrace{w_{BE}}_{\substack{\text{aucune} \\ \text{pièce mobile}}} + q_{\text{tot}} \quad \text{donc} \quad w_{BE} = h_E - h_B = 3050 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

5 Classique Appliquons le premier principe à la turbine, dans laquelle la détente isentropique est considérée adiabatique réversible.

$$\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\ll \Delta h} = w_{EF} + \underbrace{q_{EF}}_{\text{adiab}} \quad \text{donc} \quad w_{EF} = h_F - h_E = -720 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Toutefois, le compresseur consomme également un travail w_{AB} : le travail massique total algébriquement reçu par le fluide au cours du cycle complet vaut

$$w_{\text{tot}} = w_{EF} + w_{AB} \simeq w_{EF}.$$

En considérant la machine comme un moteur ditherme, le rendement thermodynamique est défini par

$$\eta = -\frac{w_{\text{tot}}}{q_{BE}} = 0,24.$$

Je trouve que l'énoncé aurait pu être un peu plus clair sur ce qu'il faut considérer comme grandeur coûteuse ... ou aurait pu dire clairement qu'on considérerait l'installation comme un moteur ditherme. Par exemple, dans une vision plus « économique » du rendement, il aurait pu être raisonnable de considérer q_{BE} comme étant gratuit car issu de l'incinération des déchets.

6 La conversion électromécanique se fait avec un rendement $\eta_{EM} = 0,9$, ce qui signifie que le travail massique fourni à l'alternateur vaut $w_{\text{élec}} = \eta_{EM} |w_{EF}|$. En définissant $\eta' = w_{\text{élec}}/q_{BE}$, on obtient

$$\eta' = \eta_{EM} \times \eta = 0,22.$$

7 **Cours** Par lecture des isotitres,

$$x_F = 0,88.$$

Le théorème des moments s'écrit

$$x_F = \frac{h_F - h_{\text{liq}}(P_F)}{h_{\text{vap}}(P_F) - h_{\text{liq}}(P_F)},$$

avec $h_F = 2430 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ l'enthalpie massique au point F , $h_{\text{liq}}(P_F) = 420 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ l'enthalpie massique du liquide saturant sous pression P_F lue sur la courbe d'ébullition et $h_{\text{vap}}(P_F) = 2670 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ l'enthalpie massique de la vapeur saturante sous pression P_F lue sur la courbe de rosée.

8 Appliquons le second principe industriel à l'ensemble du cycle,

$$\Delta s = s_{\text{éch}} + s_{\text{c}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad s_{\text{c}} = -s_{\text{éch}}.$$

Les échanges d'entropie se font lors des étapes au contact des sources $B \rightarrow E$ et $F \rightarrow A$.

▷ Au cours de l'étape $B \rightarrow E$, le transfert thermique massique algébriquement reçu est q_{tot} calculé question 4, donc l'entropie algébriquement reçue par le fluide est

$$s_{\text{éch},BE} = \frac{q_{\text{tot}}}{T_E} = \frac{h_E - h_B}{T_E}$$

en utilisant la température maximale T_E du fluide à l'issue du contact avec la source chaude ;

▷ L'étape $F \rightarrow A$ a lieu dans un échangeur sans pièce mobile, donc en simplifiant le premier principe industriel de manière analogue $q_{FA} = h_A - h_F$, d'où on déduit

$$s_{\text{éch},BE} = \frac{q_{FA}}{T_A} = \frac{h_A - h_F}{T_A}$$

en utilisant la température minimale T_A du fluide à l'issue du contact avec la source froide.

Finalement,

$$s_{\text{c}} = -\frac{h_E - h_B}{T_E} - \frac{h_A - h_F}{T_A},$$

où les valeurs sont dans le tableau de la question 2.

En règle générale, les températures des sources ne sont jamais égales aux températures extrêmes du fluide, cependant il s'agit d'une approximation fréquente.

Partie 2

9 **Classique** Voir figure 2.

Justifications :

- ▷ E' est sur la courbe de saturation ;
- ▷ E'' se trouve sur l'isotherme 375 °C à $P_{E''} = P_{E'}$;
- ▷ F' se trouve la même isentrope que E'' (détente isentropique dans la turbine) avec $P_{F'} = 1,0\text{ bar}$.

États		Pression (bar)	Température (°C)	h (kJ · kg ⁻¹)
E'	entrée réchauffe	7	162	2760
E''	entrée turbine BP	7	375	3220
F'	entrée condenseur	1	150	2760

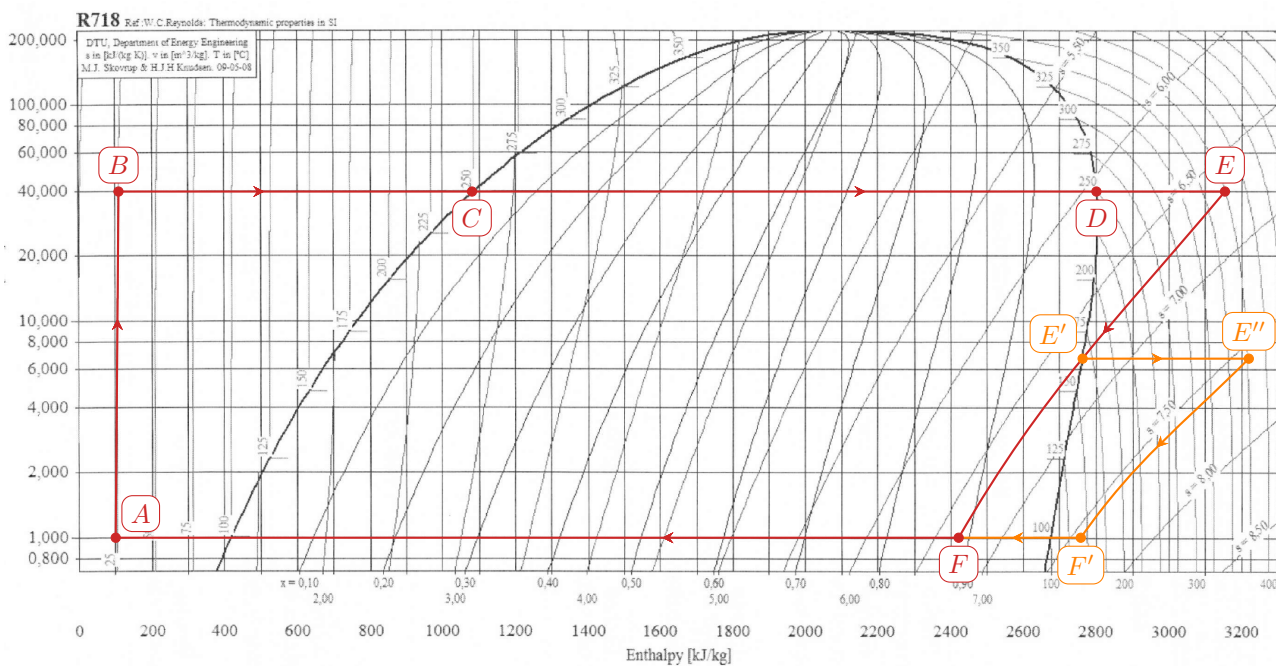


Figure 2 – Cycle optimisé en diagramme des frigoristes.

10 Appliquons le premier principe aux deux turbines de manière analogue à la question 5.

▷ turbine haute pression :

$$\Delta h = w_{EE'} + \underbrace{q_{EE'}}_{\text{adiab}} \quad \text{donc} \quad w_{EE'} = h_{E'} - h_E = -390 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

▷ turbine basse pression : de même,

$$w_{E''F'} = h_{F'} - h_{E''} = -460 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Ainsi, le travail total algébriquement reçu par le fluide au cours du cycle vaut

$$w'_{\text{tot}} = w_{AB} + w_{EE'} + w_{E''F'} \simeq -850 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Le fluide reçoit un transfert thermique de la part des chaudières d'abord au cours de l'étape $B \rightarrow E$ comme précédemment, puis au cours de la réchauffe $E' \rightarrow E''$. Le premier principe industriel appliqué à cet échangeur s'écrit

$$\Delta h = \underbrace{w_{E'E''}}_{\text{aucune pièce mobile}} + q_{E'E''} \quad \text{donc} \quad q_{E'E''} = h_{E''} - h_{E'} = 460 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Ainsi, on a au total

$$q'_{\text{tot}} = q_{BE} + q_{E'E''} = 3510 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} .$$

Finalement, le rendement du cycle optimisé vaut

$$\eta' = -\frac{w'_{\text{tot}}}{q'_{\text{tot}}} = 0,24.$$

On remarque ainsi que le cycle optimisé a le **même rendement** que le cycle initial.

11 **Classique** Le nouveau cycle permet de garantir que **seule de la vapeur sèche traverse la turbine**. En effet, les chocs entre les gouttes de liquide et les pales de la turbine pourraient les endommager et ainsi réduire la durée de vie de la turbine.

12 Une partie de l'énergie est restituée à l'alternateur sous forme de travail mécanique par l'intermédiaire des turbines. Le reste est rendu sous forme de transfert thermique à la source froide, en l'occurrence l'eau circulant dans le réseau de chaleur, au cours de l'étape $F' \rightarrow A$. En notant \mathcal{P}_{th} la puissance thermique *cédée* par le fluide, le premier principe appliqué au condenseur donne

$$D_m \Delta h = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{méca}, F'A}}_{\substack{\text{aucune} \\ \text{pièce mobile}}} - \mathcal{P}_{\text{th}}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m(h_{F'} - h_A) = 12,5 \text{ MW}.$$

La puissance électrique de l'alternateur est annoncée à 7 MW dans le document 1. En la sommant à la puissance \mathcal{P}_{th} , on retrouve quasiment le total de 20 MW correspondant à la puissance des chaudières, ce qui montre que les pertes, c'est-à-dire l'énergie cédée à l'environnement, sont très faibles.

Ainsi, cette installation produit simultanément de l'énergie électrique et de l'énergie thermique à partir d'une même source de chaleur, la chaudière à bois : on parle de cogénération. C'est très avantageux sur le plan énergétique, puisque par rapport à une centrale électrique traditionnelle, toute l'énergie cédée à la source froide n'est pas simplement dissipée dans l'atmosphère mais valorisée, ce qui améliore nettement le rendement énergétique total.

Partie 3

13 L'installation vend 96 GWh de chaleur en un an, ce qui correspond aux besoins de 20 000 habitants. On en déduit qu'un habitant consomme **environ 5 MWh par an**. En considérant qu'un logement de 100 m² est habité par trois personnes en moyenne et que certains logements sont bien isolés, on constate que l'ordre de grandeur annoncé est cohérent.

Que devient la chaleur produite mais non vendue ? J'imagine qu'il s'agit de pertes dans le réseau de distribution, mais sans certitude.

14 Si les 90 kWh de chaleur issue des déchets ou du bois en un an étaient produits par des combustibles fossiles, cela émettrait une masse de CO₂

$$m_{\text{CO}_2} = 0,250 \times 90 \cdot 10^6 = 25 \cdot 10^6 \text{ kg} = 22,5 \cdot 10^3 \text{ tonnes}.$$

La combustion de biomasse (bois ou déchets organiques) ne libère que le CO₂ piégé par les végétaux au cours de leur croissance, on peut donc la considérer **neutre du point de vue des émissions de CO₂**. En tenant compte des émissions induites **par la coupe et le transport** du bois de la forêt à la chaufferie, la valeur annoncée semble cohérente.

La neutralité carbone du chauffage au bois doit néanmoins être relativisée : certes, la pousse de nouveaux arbres permettra de capturer le CO₂ relâché par la combustion des premiers ... mais la croissance d'un arbre prend plusieurs dizaines d'années ! Ainsi, l'utilisation de bois énergie directement issu de forêts n'est pas forcément souhaitable, puisqu'elle conduit à augmenter la masse de CO₂ stockée dans l'atmosphère pendant plusieurs décennies. Cependant, en pratique, la plupart des chaufferies biomasse permettent de valoriser du bois qui a déjà eu « une autre vie » : il s'agit typiquement de palettes usagées, ou encore de chutes de scieries.

Partie 4

15 **Classique** Appliquons le premier principe industriel à l'eau du réseau urbain lors de la traversée de l'échangeur,

$$D_m(\Delta h + \underbrace{\Delta e_c + \Delta e_p}_{\ll \Delta h}) = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{méca}}}_{\text{aucune pièce mobile}} - \mathcal{P}_{\text{th}},$$

où \mathcal{P} est la puissance thermique cédée au lycée. L'eau étant un fluide indilatable et incompressible,

$$\mathcal{P} = -D_m c_{\text{eau}} \Delta T = 420 \text{ kW}.$$

Cela correspond parfaitement aux besoins du lycée.

16 À partir des valeurs en $x = 0$ et $x = D$, on déduit que la courbe ① correspond à $T_C(x)$ et la courbe ② à $T_F(x)$.

17 Pour qu'un échange thermique ait lieu, il faut avoir $T_C(x) > T_F(x)$ pour tout x . Ainsi, en supposant les propriétés du fluide chaud inchangées, la température du fluide froid en sortie de l'échangeur co-courant ne pourrait pas dépasser 70°C . Utiliser un échangeur à contre-courant permet donc de **fournir davantage d'énergie** au fluide froid.

18 **Difficile** Raisonnons sur une tranche infinitésimale d'échangeur située entre les abscisses x et $x + dx$. Il n'y a pas de pièce mobile, donc aucun échange mécanique.

▷ Le fluide chaud circule dans le sens des x croissants, et cède une puissance thermique $\varphi(x) L dx$, donc d'après le premier principe industriel,

$$D_C [h_C(x + dx) - h_C(x)] = -\varphi(x) L dx \quad \text{d'où} \quad D_C \frac{dh_C}{dx} dx = -hL [T_C(x) - T_F(x)] dx.$$

L'eau étant un liquide idéal, on obtient

$$D_C c_{\text{eau}} \frac{dT_C}{dx} = -hL [T_C(x) - T_F(x)] \quad \text{soit} \quad \frac{dT_C}{dx} = -\frac{hL}{D_C c_{\text{eau}}} [T_C(x) - T_F(x)] \quad (1)$$

▷ Raisonnons maintenant sur le fluide froid, qui circule dans le sens des x décroissants et reçoit la puissance thermique $\varphi(x) L dx$,

$$D_F [h_F(x) - h_F(x + dx)] = +\varphi(x) L dx \quad \text{d'où} \quad -D_F \frac{dh_F}{dx} dx = hL [T_C(x) - T_F(x)] dx,$$

et ainsi

$$-D_F c_{\text{eau}} \frac{dT_F}{dx} = hL [T_C(x) - T_F(x)] \quad \text{soit} \quad \frac{dT_F}{dx} = -\frac{hL}{D_F c_{\text{eau}}} [T_C(x) - T_F(x)] \quad (2)$$

Ne pas oublier le sens de l'écoulement, qui modifie la position de l'entrée et de la sortie de la tranche mésoscopique : rappelons que, lorsque l'on écrit le premier principe industriel, $\Delta h = h_{\text{sortie}} - h_{\text{entrée}}$.

En prenant la différence (1) - (2), on obtient

$$\frac{d}{dx} (T_C - T_F) = -\frac{hL}{D_C c_{\text{eau}}} [T_C - T_F] + \frac{hL}{D_F c_{\text{eau}}} [T_C - T_F]$$

qui se factorise en

$$\frac{d}{dx} (T_C - T_F) = -\frac{hL}{c_{\text{eau}}} \left(\frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right) (T_C - T_F),$$

et qui conduit en séparant les variables à

$$\frac{d(T_C - T_F)}{T_C - T_F} = -\frac{hL}{c_{\text{eau}}} \left(\frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right) dx.$$

19 Notons $\mathcal{P} > 0$ la puissance totale cédée par le fluide chaud au fluide froid. Appliquons le premier principe sur l'ensemble de l'échangeur. Pour le fluide chaud,

$$D_C [h_C(D) - h_C(0)] = -\mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad D_C c_{\text{eau}} [T_C(D) - T_C(0)] = -\mathcal{P}.$$

Pour le fluide froid, qui s'écoule dans le sens des x décroissants,

$$D_F [h_F(0) - h_F(D)] = +\mathcal{P} \quad \text{d'où} \quad D_F c_{\text{eau}} [T_F(0) - T_F(D)] = \mathcal{P}.$$

On en déduit

$$\begin{cases} \frac{1}{D_C c_{\text{eau}}} = \frac{T_C(0) - T_C(D)}{\mathcal{P}} \\ \frac{1}{D_F c_{\text{eau}}} = \frac{T_F(0) - T_F(D)}{\mathcal{P}} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{c_{\text{eau}}} \left(\frac{1}{D_C} - \frac{1}{D_F} \right) = \frac{T_C(0) - T_C(D) - T_F(0) + T_F(D)}{\mathcal{P}}$$

ce qui permet de réécrire

$$\alpha = \frac{hL}{\mathcal{P}} [(T_C(0) - T_F(0)) - (T_C(D) - T_F(D))].$$

20 On constate que $\alpha > 0$ si $D_C < D_F$ et $\alpha < 0$ si $D_C > D_F$. À partir des courbes de température, on constate que

$$T_C(0) - T_F(0) > T_C(D) - T_F(D) \quad \text{d'où} \quad \alpha > 0,$$

ce qui permet de conclure que le **débit D_F circulant côté lycée est supérieur au débit D_C circulant côté réseau de chaleur.**

Il aurait en fait suffit pour conclure de reprendre l'équation différentielle obtenue question 18, et de constater sur les courbes que l'écart $T_C - T_F$ est une fonction décroissante de x .

21 Intégrons l'équation issue de la question 18 entre $x = 0$ et $x = D$,

$$\begin{aligned} \int_{T_C(0)-T_F(0)}^{T_C(D)-T_F(D)} \frac{d(T_C - T_F)}{T_C - T_F} &= -\alpha \int_0^D dx \\ \ln \frac{T_C(D) - T_F(D)}{T_C(0) - T_F(0)} &= -\alpha D \\ \ln \frac{T_C(0) - T_F(0)}{T_C(D) - T_F(D)} &= +\frac{hL}{\mathcal{P}} [(T_C(0) - T_F(0)) - (T_C(D) - T_F(D))] D \end{aligned}$$

et en isolant h on obtient

$$h = \frac{\mathcal{P}}{LD} \frac{\ln \frac{T_C(0)-T_F(0)}{T_C(D)-T_F(D)}}{(T_C(0) - T_F(0)) - (T_C(D) - T_F(D))}.$$

22 Numériquement,

$$h = \frac{420 \cdot 10^3}{0,20 \times 70} \frac{\ln \frac{95-75}{70-65}}{(95-75) - (70-65)} = \frac{420 \cdot 10^3 \ln 4}{14 \cdot 15} \simeq \frac{4,20 \cdot 10^5 \cdot 1,4}{14 \cdot 15} \simeq 0,25 \cdot 10^5 \times 0,1$$

soit finalement

$$h \simeq 2,5 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1},$$

ce qui est un excellent résultat par rapport aux performances classiques des échangeurs liquide-liquide données dans le tableau de l'énoncé.

Ce résultat particulièrement bon est dû aux arrondis utilisés pour les applications numériques à faire sans calculatrice. Les valeurs exactes indiquées en bas du document 6 conduisent à une valeur de h un peu moins élevée.