DM 12 – à rendre mercredi 22 janvier *Correction*

Induction

I - Rail de Laplace en chute libre

I.A - Étude de l'équilibre

1 À l'équilibre, la tige mobile ne bouge pas donc le flux magnétique au travers du circuit ne varie pas : il n'y a donc pas d'induction. Le circuit électrique équivalent ne se compose donc que du générateur et de la résistance, voir figure 1. D'après la loi des mailles,

$$e - Ri = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I_0 = -\frac{E}{R}\,.}$$

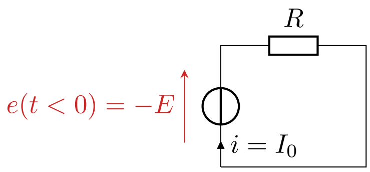

Figure 1 – **Circuit électrique équivalent lorsque la tige est à l'équilibre.**

2 Compte tenu du sens d'orientation du courant dans le circuit,

$$\vec{F}_\mathrm{L} = \int_\text{tige} I_0(\mathrm{d}\ell\,\vec{e}_x) \wedge B\,\vec{e}_y = I_0 \ell B\,\vec{e}_z \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{F}_\mathrm{L} = -\frac{E}{R}\ell B\,\vec{e}_z\,.}$$

3 À l'équilibre, le poids de la tige est exactement compensé par la force de Laplace, soit

$$m\vec{g} + \vec{F}_\mathrm{L} = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad mg - \frac{E}{R}\ell B = 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E = \frac{mgR}{\ell B}\,.}$$

I.B - Étude de la chute

4 En l'absence de générateur, le courant dans le système est uniquement le courant induit $i(t)$, mais l'expression de la force de Laplace ne change pas puisque les conventions d'orientation ne changent pas :

$$\vec{F}_\mathrm{L} = i\ell B\,\vec{e}_z\,.$$

La cause du phénomène d'induction est la chute de la tige à cause de son poids. La conséquence est donc une force de Laplace de sens opposé au poids, c'est-à-dire dirigée selon $-\vec{e}_z$: on en déduit

$$\boxed{\forall t > 0, \quad i(t) < 0\,.}$$

5 Compte tenu des orientations, le flux magnétique au travers du circuit s'écrit

$$\Phi = \iint B\,\vec{e}_y \cdot \mathrm{d}S\,\vec{e}_y = +B\ell z\,,$$

d'où on déduit la force électromotrice

$$e_\text{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\ell B\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\ell B v\,.$$

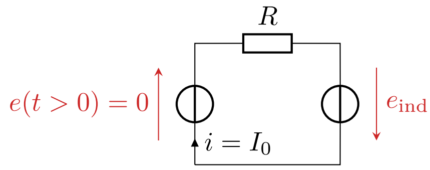

Figure 2 – Circuit électrique équivalent lorsque la tige est en mouvement.

En tenant compte du générateur induit dans le circuit équivalent, voir figure 2, on en déduit

$$\cancel{e} - Ri + e_{\text{ind}} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Ri + \ell B v = 0\,.}$$

6 La tige est soumise à son poids et à la force de Laplace. En lui appliquant le TRC,

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + i\ell B\vec{e}_z$$

ce qui donne en projection sur l'axe (Oz)

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg + i\ell B\,.}$$

7 D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{\ell B}{R}v$$

donc en injectant dans l'équation mécanique,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{(\ell B)^2}{R}v \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{(\ell B)^2}{mR}v = g}$$

En posant $\tau = mR/(\ell B)^2$, les solutions de cette équation sont de la forme

$$v(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \tau g$$

et comme la tige est initialement immobile alors

$$v(t{=}0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + \tau g \qquad \text{donc} \qquad A = -\tau g$$

et ainsi

$$\boxed{v(t) = \tau g\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

8 En reprenant l'équation électrique,

$$i = -\frac{\ell B}{R}\tau g\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) = -\frac{\ell B}{R}\frac{mR}{(\ell B)^2}g\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

ce qui donne

$$\boxed{i = -\frac{mg}{\ell B}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

Puisque $mg/\ell B > 0$ et $e^{-t/\tau} < 1$, on vérifie bien que l'intensité est toujours négative, conformément à ce que prédit la loi de Lenz.

9 L'équation électrique multipliée par l'intensité donne

$$Ri^2 + \ell B v i = 0\,.$$

Par ailleurs, l'équation mécanique multipliée par la vitesse donne

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v = mgv + i\ell B v\,.$$

En identifiant les deux expressions de $i\ell Bv$, on peut combiner ces équations sous la forme

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v = mgv - Ri^2 \qquad \text{soit} \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v - mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -Ri^2 \qquad \text{donc} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz\right) = -Ri^2$$

L'axe (Oz) étant dirigé vers le bas, on reconnaît bien $E_{\mathrm{pp}} = -mgz$, ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{\mathrm{Joule}}\,.}$$

Cela signifie que la tige perd de l'énergie mécanique au cours de sa chute, cette énergie étant convertie sous forme électrique puis dissipée par effet Joule.

II - Expérience de Rüchardt

inspiré oral banque PT

> *Une réponse s'appuyant sur des conventions d'orientation non définies ne peut qu'être fausse ! L'énoncé ne définit ni axes, ni sens d'orientation du courant : il est donc incontournable de reproduire le schéma sur votre copie pour les définir. De plus, les deux conventions peuvent ici paraître naturelles, l'une car elle permet d'orienter e en convention générateur, l'autre car elle conduit à un vecteur surface dans le sens de $\overrightarrow{B}$. La convention choisie ne peut donc absolument pas être sous-entendue.*

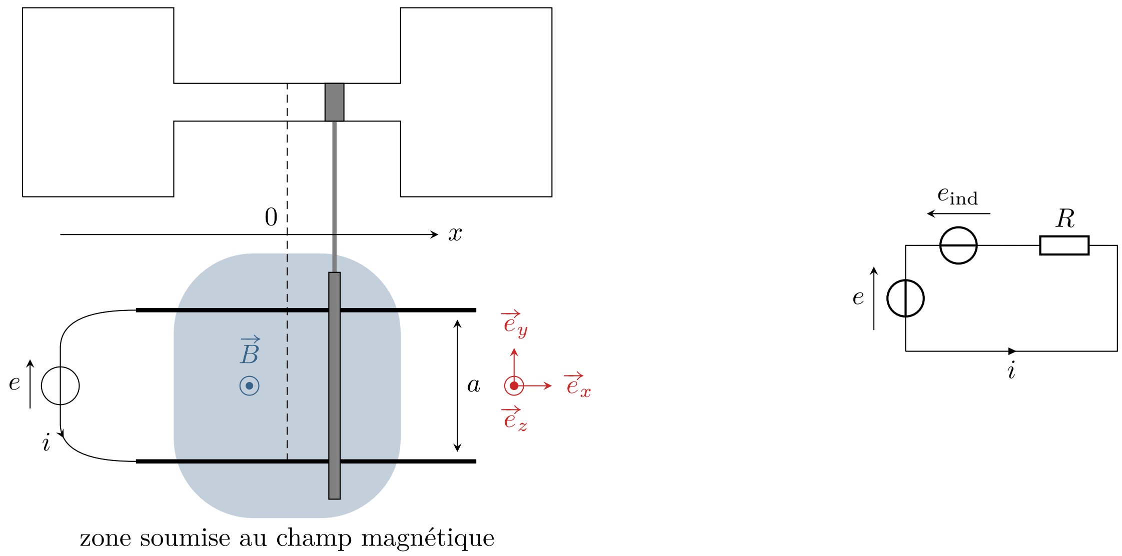

Figure 3 – Schéma des notations. Gauche : schéma mécanique. Droite : schéma électrique équivalent.

$\boxed{10}$ Raisonnons sur le compartiment de gauche. Lorsque le piston se déplace de x, son volume passe de V_0 à $V_0 + S_0 x$ et sa pression de P_0 à P_{g}. Le déplacement du piston étant adiabatique réversible,

$$P_{\mathrm{g}}(V_0 + S_0 x)^\gamma = P_0 {V_0}^\gamma$$
$$P_{\mathrm{g}} = \left(\frac{V_0}{V_0 + S_0 x}\right)^\gamma P_0$$
$$P_{\mathrm{g}} = \left(1 + \frac{S_0}{V_0}x\right)^{-\gamma} P_0$$
$$\boxed{P_{\mathrm{g}} \simeq \left(1 - \gamma\frac{S_0}{V_0}x\right) P_0}$$

De même, le volume du compartiment de droite passe de V_0 à $V_0 - S_0 x$, d'où

$$\boxed{P_{\mathrm{d}}(x) \simeq \left(1 + \gamma\frac{S_0}{V_0}x\right) P_0}$$

La force pressante subie par le piston vaut alors

$$\vec{F}_P = (P_\mathrm{g} - P_\mathrm{d}) S_0 \, \vec{e}_x \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{F}_P = -2\gamma \frac{{S_0}^2 P_0}{V_0} x \, \vec{e}_x \,.}$$

Cette expression correspond bien à celle de la force exercée par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur

$$\boxed{k = 2\gamma \frac{{S_0}^2 P_0}{V_0} \,.}$$

11 La loi de Faraday relie la force électromotrice induite aux variations de flux magnétique au travers du circuit,

$$e_\mathrm{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,.$$

Notons Φ_0 le flux magnétique au travers du circuit lorsque le barreau magnétique se trouve en $x = 0$. La normale orientée au circuit étant $+\vec{e}_z$ et en supposant que le barreau voit le champ $\vec{B}_0$ en tout point, le flux au travers du circuit lorsque le barreau se trouve à une position quelconque devient

$$\Phi(x) = \Phi_0 + B_0 a x \qquad \text{d'où} \qquad e_\mathrm{ind} = -a B_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,.$$

> *Attention, la surface soumise au champ magnétique n'est pas égale à ax ... et le flux n'est donc pas plus égal à aB_0x, il faut y ajouter une constante correspondant au flux au travers du circuit lorsque $x = 0$.*

Le circuit électrique équivalent est représenté figure 3, en orientant la fém induite en convention générateur par rapport au sens conventionnel de i. Par la loi des mailles,

$$e - e_\mathrm{ind} + Ri = 0$$

d'où on déduit

$$\boxed{i = -\frac{e}{R} - \frac{aB_0}{R}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,.}$$

> *Dans le cas où vous auriez choisi l'autre convention pour orienter i, les résultats auraient été*
>
> $$\Phi(x) = \Phi_0 - B_0 a x \qquad \text{donc} \qquad e_{ind} = +aB_0 v_x$$
>
> *puis pour la loi des mailles*
>
> $$e + e_{ind} - Ri \qquad \text{d'où} \qquad i = \frac{e + aB_0 v_x}{R} \,.$$

12 Le système considéré subit la force pressante $\vec{F}_P$, la force de frottement $\vec{f}$, et la force de Laplace

$$\vec{F}_\mathrm{L} = \int_\mathrm{barreau} i(\mathrm{d}\ell \, \vec{e}_y) \wedge B_0 \, \vec{e}_z = i a B_0 \, \vec{e}_x \,.$$

> *L'autre convention d'orientation pour i donnerait $\vec{F}_\mathrm{L} = -iaB_0 \, \vec{e}_x$.*

Le système est implicitement horizontal, son poids est donc compensé par une force de réaction des rails. Par application du théorème de la résultante cinétique dans le référentiel terrestre galiléen,

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_P + \vec{f} + \vec{F}_\mathrm{L}$$

soit en projection sur $\vec{e}_x$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \lambda \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + iaB = -kx - \lambda \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{aB_0}{R} e - \frac{(aB_0)^2}{R} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

et en réorganisant les termes

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{(aB_0)^2}{mR} + \frac{\lambda}{m} \right) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m} x = -\frac{aB_0}{mR} e}$$

On identifie alors à la forme canonique d'une équation différentielle du deuxième ordre,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = -\frac{aB_0}{mR}e$$

soit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\gamma {S_0}^2 P_0}{mV_0}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{mR}{(aB_0)^2 + \lambda R}\omega_0 = \frac{mR}{(aB_0)^2 + \lambda R}\sqrt{\frac{2\gamma {S_0}^2 P_0}{mV_0}}\,.}$$

13 En passant l'équation différentielle dans le domaine complexe, après simplification par $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$,

$$-\omega^2 \underline{X} + \mathrm{j}\omega\,\frac{\omega_0}{Q}\,\underline{X} + {\omega_0}^2\,\underline{X} = -\frac{aB_0}{mR}\,E$$

ce que l'on peut réécrire

$$\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\,\frac{\omega_0}{Q}\right)\underline{X} = -\frac{aB_0}{mR}\,E$$

et ainsi

$$\underline{X} = \frac{-\dfrac{aB_0}{mR}\,E}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\,\dfrac{\omega_0}{Q}} = \frac{-\dfrac{aB_0}{mR{\omega_0}^2}\,E}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \mathrm{j}\,\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$$

ce qui est bien de la forme demandée avec

$$A = -\frac{aB_0}{mR{\omega_0}^2}\,E\,.$$

14 Par définition,

$$\boxed{X_0 = |\underline{X}| = \frac{|A|}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}\,.}$$

Il y a résonance s'il existe une pulsation $\omega_{\text{rés}}$ pour laquelle X_0 est maximale, et donc si le numérateur est minimal. En posant $u = \omega^2/{\omega_0}^2$, chercher la pulsation de résonance revient bien à chercher le minimum de la fonction

$$f(u) = (1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}\,.$$

Le domaine de définition pertinent de u est restreint à $\mathbb{R}_+$ compte tenu de la définition de u en fonction des pulsations.

15 En développant l'expression de f,

$$f(u) = 1 - 2u + u^2 + \frac{u}{Q^2} = u^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)u + 1$$

d'où on déduit

$$f'(u) = 2u + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \qquad \text{et} \qquad f''(u) = 2\,.$$

On en déduit que la dérivée f' s'annule en

$$u_{\text{rés}} = 1 - \frac{1}{2Q^2}\,,$$

ce qui ne correspond à un extrêmum intéressant que s'il est positif, c'est-à-dire si et seulement si

$$2Q^2 > 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}\,.}$$

Il s'agit bien d'un minimum puisque $f''(u_{\text{rés}}) > 0$.

> *Ne pas oublier que l'annulation de la dérivée est aussi bien valable pour un minimum que pour un maximum. Prouver qu'il s'agit d'un minimum nécessite d'étudier la dérivée seconde. Ceci dit, je ne pense pas que vous soyez pénalisé sur ce problème de rigueur dans une copie de physique.*

16 En reprenant les définitions successives,

$$\omega_{\text{rés}} = \omega_0 \sqrt{u_{\text{rés}}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_{\text{rés}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\,.}$$

Pour $Q \gtrsim 10$, on peut approximer $\omega_{\text{rés}} \simeq \omega_0$. D'après la question 12, on en déduit

$$\boxed{\gamma = \frac{mV_0}{2{S_0}^2 P_0} {\omega_{\text{rés}}}^2\,.}$$