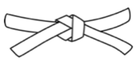
BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

DM 12 – à rendre mercredi 22 janvier

Induction

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Partie I
	Ceinture jaune	Partie I
	Ceinture rouge	Partie II
	Ceinture noire	Partie II

I - Rail de Laplace en chute libre

Considérons la situation (très théorique ... mais qui donne un exercice intéressant) d'un rail de Laplace vertical, dont la tige mobile tombe en chute libre sous l'effet de son propre poids tout en restant continuellement en contact avec les rails. Le dispositif est schématisé figure 1. La position de la tige est repérée le long d'un axe (Oz) vertical descendant. Un générateur de fém $e(t)$ impose un échelon de tension au système : $e(t<0) = -E$, ce qui permet de maintenir la tige en équilibre, alors que $e(t>0) = 0$. On note m la masse de la tige mobile et R la résistance du système, indépendante de z.

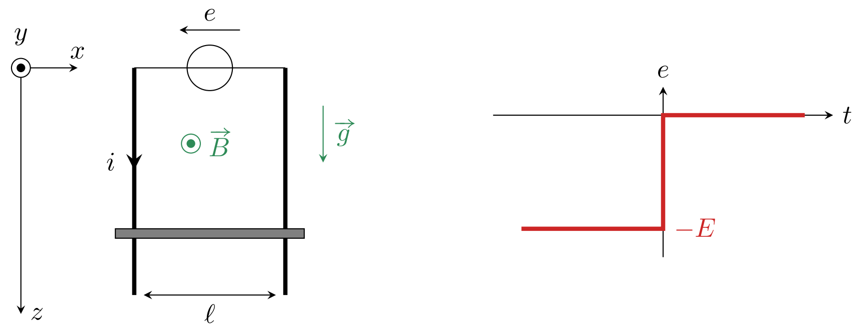


Figure 1 – **Schéma du dispositif étudié.**

I.A - Étude de l'équilibre

On s'intéresse pour commencer à la situation pour $t<0$ où la tige est maintenue à l'équilibre grâce à la tension imposée par le générateur.

1 - Montrer que le courant dans le système vaut $I_0 = -E/R$. Justifier en particulier qu'aucun phénomène inductif n'est à prendre en compte dans cette situation.

2 - Exprimer la force de Laplace subie par la tige en fonction de E notamment.

3 - En déduire la tension E que doit imposer le générateur pour que la tige demeure immobile.

I.B - Étude de la chute

On se place maintenant à $t > 0$, où le générateur n'impose plus aucune tension : $e = 0$.

4 - Déterminer le signe du courant induit i pendant la phase de chute à partir de la loi de Lenz.

5 - Représenter le circuit électrique équivalent au montage, et en déduire l'équation électrique.

6 - Procéder à un bilan des actions mécaniques subies par la tige, et en déduire l'équation mécanique.

7 - Déduire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la tige et la résoudre.

8 - En déduire l'expression de $i(t)$ et vérifier le signe prévu à la question 4. Il n'est pas nécessaire d'établir une nouvelle équation différentielle.

9 - Procéder au bilan d'énergie du système, et montrer qu'il se met sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_\mathrm{Joule} \, .$$

L'interpréter physiquement.

II - Expérience de Rüchardt

inspiré oral banque PT

L'expérience de Rüchardt permet de mesurer l'indice adiabatique $\gamma = c_P/c_V$ d'un gaz parfait. Il en existe plusieurs variantes. Celle que l'on étudie dans ce sujet est une modélisation de l'expérience réalisée par Clark et Katz autour de 1940, qui a donné les valeurs de référence pendant une dizaine d'année.

Le dispositif expérimental, schématisé figure 2, est constitué de deux réservoirs identiques de grand volume, reliés par un tube de section S_0. Un piston mobile se trouve à l'intérieur du tube. On note P_0 la pression et V_0 le volume de chaque compartiment lorsque le piston se trouve au milieu du tube. Un dispositif excitateur permet de forcer le mouvement du piston : il s'agissait d'un électroaimant dans l'expérience de Clark et Katz, modélisé ici par un système de rails de Laplace où le piston serait rigidement lié au barreau mobile. Les frottements du piston sur les parois du tube se traduisent par une force de frottement linéaire $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$. Dans l'ensemble de l'exercice, les mouvements du piston sont suffisamment rapides pour considérer adiabatiques et réversibles les transformations subies par le gaz contenu dans chaque compartiment.

La résistance électrique R du système de rails est supposée indépendante de la position du barreau mobile. Un champ magnétique extérieur est imposé au système, et se fait sentir sur une zone suffisamment vaste pour considérer que le barreau mobile ressent toujours un champ $\overrightarrow{B}_0$ uniforme, quelle que soit sa position.

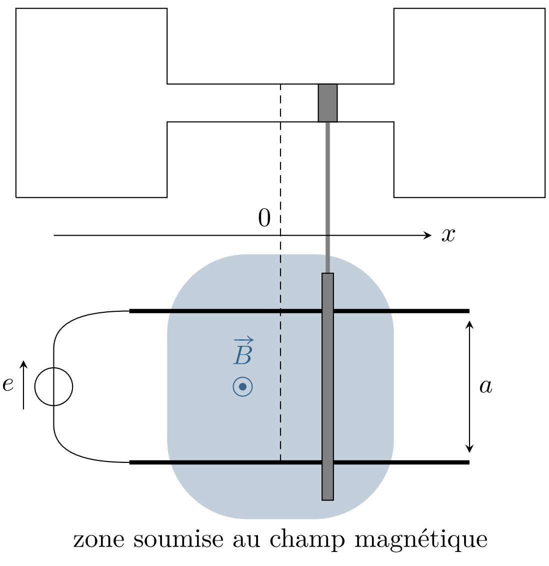


Figure 2 – Schéma de principe du dispositif étudié.

10 - On considère un petit déplacement x du piston. Exprimer, au premier ordre en x, la pression dans chacun des compartiments. En déduire que la force subie par le piston est analogue à celle d'un ressort, dont on exprimera la raideur apparente en fonction de γ notamment.

11 - Énoncer la loi de Faraday. En déduire le courant dans le système lors du déplacement du piston.

12 - Procéder à un bilan des actions mécaniques subies par le système {piston + tige de liaison + barreau mobile}, de masse totale m. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$. Identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du système.

> *La fin de l'énoncé qui m'a été rapporté n'est pas très claire, car l'étudiant n'a pas eu le temps de traiter l'exercice en entier. Il n'y avait visiblement qu'une seule question supplémentaire, qui était posée plus ou moins sous la forme suivante : « En pratique $Q \gtrsim 10$, et la tension e est sinusoïdale. Que vaut approximativement la pulsation de résonance ? En déduire l'expression de γ. ». J'ai ajouté des questions intermédiaires en guise de révisions pour redémontrer les résultats sur la résonance.*

L'expérience exploite le phénomène de résonance : la tension imposée par le générateur est sinusoïdale, de la forme $e(t) = E\cos(\omega t)$, et on cherche expérimentalement la pulsation $\omega_{\text{rés}}$ pour laquelle les mouvements du piston sont d'amplitude maximale. La réponse du piston s'écrit sous la forme $x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi)$ et on travaille en représentation complexe, en posant $\underline{x}(t) = \underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ avec $\underline{X} = X_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ et $\underline{e}(t) = E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.

13 - Montrer que $\underline{X}$ s'écrit sous la forme

$$\underline{X} = \frac{A}{1 - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2} + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}\,.$$

14 - Exprimer l'amplitude X_0 de $x(t)$ en fonction de A, ω, ω_0 et Q. En déduire que la recherche de l'éventuelle pulsation de résonance se ramène à la recherche d'un minimum sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f(u) = (1-u)^2 + \frac{u}{Q^2}\,.$$

15 - Montrer que cette fonction n'admet de minimum que si Q est supérieur à une valeur à déterminer. En déduire la valeur de u qui minimise f.

16 - Déterminer la pulsation de résonance $\omega_{\text{rés}}$. En pratique, $Q \gtrsim 10$ dans l'expérience. Simplifier l'expression de $\omega_{\text{rés}}$, et conclure en exprimant γ en fonction des paramètres pertinents.