



Conduction thermique

Température de contact

A - Préambule

1 On a montré en cours que

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

Raisonnons en termes d'unités du système international, sachant que $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$[D] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}} \quad \text{soit} \quad [D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Numériquement,

$$D_{\text{peau}} = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad D_{\text{acier}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad D_{\text{bois}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

2 Puisque ℓ dépend de D et t , c'est qu'il existe deux exposants p et q et une constante sans dimension $k \simeq 1$ tels que $\ell(t)$ s'écrive sous la forme

$$\ell(t) = k D^p t^q.$$

Dimensionnellement,

$$[\ell] = 1 \times [D]^p \times [t]^q \quad \text{soit} \quad \text{m} = \text{m}^{2p} \cdot \text{s}^{-p} \times \text{s}^q$$

La relation n'est homogène que si $p = q = 1/2$, d'où en prenant $k = 1$

$$\ell(t) = \sqrt{Dt}.$$

3 Numériquement, on trouve

$$\ell_{\text{peau}} = 1,5 \text{ mm} \quad \ell_{\text{acier}} = 2,5 \text{ cm} \quad \ell_{\text{bois}} = 2,5 \text{ mm}.$$

Supposer un milieu semi-infini signifie que son épaisseur est très supérieure à la longueur ℓ : même si cette approximation n'est pas complètement pertinente dans tous les cas, elle permettra néanmoins de comprendre physiquement la situation de manière raisonnable.

B - Premier modèle : hypothèse quasi-stationnaire

4 L'équation de la chaleur en trois dimensions s'écrit

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans le cas d'un milieu unidimensionnel en régime stationnaire, T ne dépend que de x , et l'équation de la chaleur devient

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

5 Par double intégration, on en déduit le profil de température

$$T(x) = A_i x + B_i.$$

Dans le milieu 1, les conditions aux limites s'écrivent

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B_1 \quad \text{et} \quad T(x=-\ell_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} -A_1\ell_1 + B_1$$

d'où on déduit

$$A_1 = \frac{T_0 - T_1}{\ell_1}$$

et ainsi

$$T(x < 0, t) = T_0 + \frac{T_0 - T_1}{\ell_1(t)} x.$$

De même, dans le milieu 2,

$$T(x=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} B_2 \quad \text{et} \quad T(x=\ell_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CL}}}{=} T_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A_2\ell_2 + B_2$$

d'où on déduit

$$A_2 = \frac{T_1 - T_0}{\ell_2}$$

et ainsi

$$T(x > 0, t) = T_0 + \frac{T_2 - T_0}{\ell_2(t)} x.$$

6 La continuité de la température en $x = 0$ se résume à $T_0 = T_0$ et n'apporte donc rien d'intéressant : en fait, on l'a déjà utilisée comme condition limite pour déterminer le profil de température. La continuité du vecteur densité de courant thermique s'écrit à une dimension

$$j_x(x=0^-, t) = j_x(x=0^+, t) \quad \text{soit} \quad -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x=0^-, t) = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x=0^+, t)$$

et ainsi

$$\lambda_1 \frac{T_0 - T_1}{\ell_1(t)} = \lambda_2 \frac{T_2 - T_0}{\ell_2(t)}.$$

Or dans un matériau donné

$$\frac{\lambda}{\ell(t)} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} t}} = \frac{\sqrt{\lambda \rho c}}{\sqrt{t}} = \frac{E}{\sqrt{t}}.$$

En simplifiant par \sqrt{t} , l'équation de continuité peut se réécrire

$$E_1(T_0 - T_1) = E_2(T_2 - T_0) \\ (E_1 + E_2)T_0 = E_1T_1 + E_2T_2$$

$$T_0 = \frac{E_1T_1 + E_2T_2}{E_1 + E_2}.$$

7 On trouve

$$T_{0,\text{acier}} = 7^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_{0,\text{bois}} = 23^\circ\text{C},$$

ce qui est conforme à l'observation, le bois est plus chaud au toucher que l'acier car la température de contact est plus élevée.

8 Le schéma équivalent est représenté figure 1.

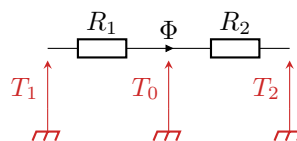


Figure 1 – Schéma électrique équivalent.

Les deux résistances sont montées en série et forment donc un pont diviseur de tension. Ainsi, en convention récepteur

$$\frac{T_1 - T_0}{T_1 - T_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La loi des nœuds en potentiel appliquée au nœud central conduit également au résultat,

$$\frac{T_1 - T_0}{R_1} + \frac{T_2 - T_0}{R_2} = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T_0 &= T_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}(T_1 - T_2) \\ &= \frac{(R_1 + R_2)T_1 - R_1(T_1 - T_2)}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_2T_1 + R_1T_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Or pour une paroi plane

$$R = \frac{\ell}{\lambda S} \underset{\text{ici}}{=} \frac{\sqrt{Dt}}{\lambda S} = \frac{\sqrt{t}}{S\sqrt{\lambda\rho c}} = \frac{\sqrt{t}}{SE}.$$

En injectant dans l'expression de T_0 et en simplifiant par \sqrt{t}/S ,

$$T_0 = \frac{\frac{T_1}{E_2} + \frac{T_2}{E_1}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \times \frac{E_1E_2}{E_1E_2}$$

$$\boxed{T_0 = \frac{E_1T_1 + E_2T_2}{E_1 + E_2}},$$

ce qui est bien le résultat préalablement établi.

C - Second modèle : résolution analytique de l'équation de la chaleur

9 On constate de manière évidente que $f_i(x=0, t) = 0$. Ainsi,

$$T(x=0^-, t) \underset{\text{CL}}{=} T_0 \underset{\text{expr}}{=} A + B \times 0 \quad \text{donc} \quad A = T_0$$

puis

$$T(x \rightarrow -\infty, t) \underset{\text{CL}}{=} T_1 \underset{\text{expr}}{=} A - B = T_0 - B \quad \text{donc} \quad B = T_0 - T_1$$

si bien que

$$\boxed{T(x < 0, t) = T_0 + (T_0 - T_1)f_1(x, t)}.$$

Enfin, pour vérifier que la solution proposée est bien compatible avec la condition initiale, plaçons nous en un $x < 0$ quelconque et faisons tendre t vers 0^+ de façon à avoir

$$\frac{x}{\sqrt{2D_i t}} \rightarrow -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f_1(x, t) = -1.$$

On trouve alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(x < 0, t) = T_0 - (T_0 - T_1) = T_1,$$

ce qui est bien la condition initiale donnée.

10 On trouve de même $C = T_0$, puis

$$T(x \rightarrow +\infty, t) \underset{\text{CL}}{=} T_2 \underset{\text{expr}}{=} C + D = T_0 + D \quad \text{donc} \quad D = T_2 - T_0$$

et ainsi

$$\boxed{T(x > 0, t) = T_0 + (T_2 - T_0)f_2(x, t)}.$$

11 On sait que

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(u) du = f(x).$$

Ainsi, en appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{2D_i t}} \right) \times \exp \left(-\frac{x^2}{2D_i t} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi D_i t}} \exp \left(-\frac{x^2}{2D_i t} \right)$$

Par conséquent, en se plaçant en $x = 0$,

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x}(x=0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi D_i t}}}$$

La continuité du vecteur densité de courant thermique s'écrit comme à la question 6

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x=0^-, t) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x=0^+, t) \quad \text{soit} \quad \lambda_1(T_0 - T_1) \times \sqrt{\frac{2}{\pi D_1 t}} = \lambda_2(T_2 - T_0) \times \sqrt{\frac{2}{\pi D_2 t}}$$

Sachant que $\lambda/\sqrt{D} = \sqrt{\rho c \lambda} = E$,

$$E_1(T_0 - T_1) = E_2(T_2 - T_0)$$

ce qui ramène exactement à l'équation de la question 6, qui se résout en

$$\boxed{T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}}$$

12 Au final, l'expression de la température de contact T_0 en fonction des effusivités ne vient que de la condition aux limites, c'est-à-dire de la continuité du flux thermique en $x = 0$. Les deux modèles prédisent des profils de température nettement différents dans les matériaux ... mais qui prévoient le même flux en $x = 0$, et donc la même température de contact. La figure 2 illustre ces aspects.

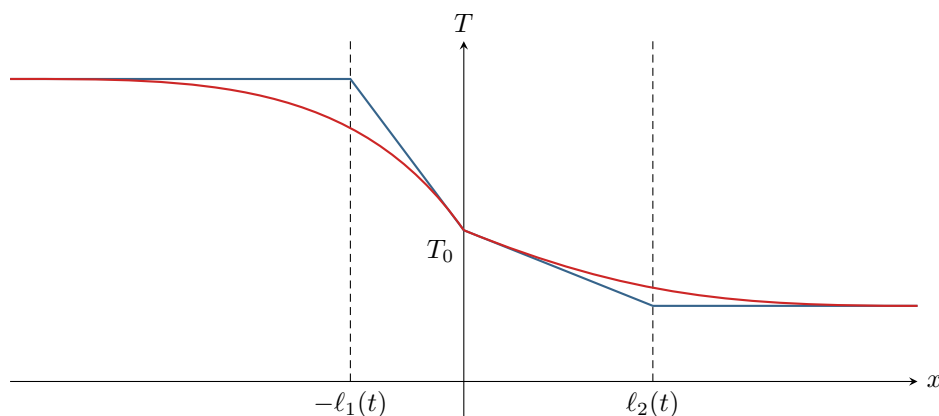


Figure 2 – Profil de température dans les matériaux. Le profil approximé dans l'hypothèse quasi-stationnaire est représenté en bleu, le profil exact en rouge.