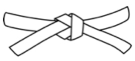
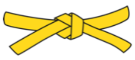
DM 13 – à rendre lundi 3 février

Conduction thermique

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. Réfléchir ensemble est une bonne idée, mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours, par mail ou via l'ENT.

Ceinture		Travail à réaliser
	Ceinture blanche	Questions 1 à 7
	Ceinture jaune	Questions 1 à 8
	Ceinture rouge	En entier
	Ceinture noire	En entier

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Température de contact

Deux objets se trouvant depuis longtemps dans le même environnement sont forcément à la même température. Pourtant, lorsqu'on les touche du doigt, leur température pourra nous paraître différente en fonction de la nature du matériau qui les compose : du bois ou du tissu paraîtront plus chaud que du métal. Cet exercice propose d'expliquer ce paradoxe.

On adopte les hypothèses de modélisation suivantes :

- la géométrie du problème est unidimensionnelle ;
- les deux matériaux sont supposés semi-infinis, le doigt (matériau 1) occupant le demi-espace $x < 0$ et le métal ou le bois (matériau 2) le demi-espace $x > 0$;
- les deux matériaux sont initialement à température uniforme T_1 et T_2, et sont mis en contact à l'instant $t = 0$;
- on suppose que le contact thermique entre les deux matériaux est parfait pour $t > 0$, ce qui implique la continuité de la température et du flux thermique en $x = 0$.

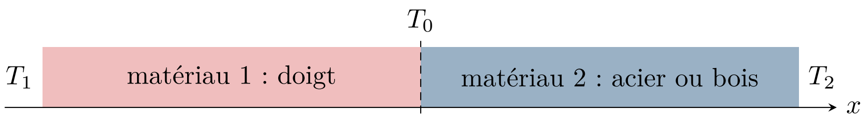


Figure 1 – Schéma de la situation.

Données :

Matériau	Peau	Acier	Bois
Conductivité thermique λ ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)	0,3	50	0,2
Masse volumique ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	$1 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	$0{,}5 \cdot 10^3$
Capacité thermique massique c ($\mathrm{kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$)	4	0,5	2

A - Préambule

1 - Rappeler sans démonstration l'expression de la diffusivité thermique D en fonction des caractéristiques thermodynamiques du matériau. Établir sa dimension en fonction de celles des données du tableau. Calculer sa valeur numérique pour les trois matériaux étudiés.

2 - En raisonnant par analyse dimensionnelle, estimer en fonction de D et t la longueur caractéristique $\ell(t)$ sur laquelle se propage le front de diffusion pendant une durée t.

3 - Calculer numériquement la distance ℓ pour les trois matériaux cités pour $t = 30\,\mathrm{s}$, ce qui est très supérieur à la durée nécessaire pour que la température de contact soit stabilisée. Commenter la modélisation par des milieux semi-infinis.

B - Premier modèle : hypothèse quasi-stationnaire

On adopte dans cette partie un premier modèle pour le profil de température dans les matériaux : on suppose que la température est égale à T_1 pour $x \leq -\ell_1(t)$ et à T_2 pour $x \geq \ell_2(t)$ et qu'elle se calcule par une approche quasi-stationnaire dans le domaine intermédiaire. Cela signifie en pratique que le profil de température peut être calculé comme en régime stationnaire, mais en supposant que les paramètres ℓ_1 et ℓ_2 intervenant dans le résultat dépendent du temps.

4 - Rappeler l'équation de la chaleur en régime variable à trois dimensions, et la simplifier en justifiant compte tenu des hypothèses de milieux unidimensionnels et de régime stationnaire.

5 - Résoudre cette équation pour déterminer les profils de températures $T(x < 0, t)$ et $T(x > 0, t)$ en fonction notamment des températures T_1, T_2 et de la température de contact T_0.

6 - Exprimer les conditions aux limites en $x = 0$: continuité de la température et du vecteur densité de courant thermique. En déduire que la température de contact T_0 ne dépend pas du temps et vaut

$$T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

où l'on définit *l'effusivité* du matériau par $E = \sqrt{\lambda \rho c}$.

7 - Calculer numériquement T_0 dans le cas où le doigt est posé sur de l'acier ou sur du bois, en prenant $T_1 = 30\,°\mathrm{C}$ (température au voisinage de la surface de la peau) et $T_2 = 5\,°\mathrm{C}$. Les résultats sont-ils conformes à ce que l'on constate en pratique ?

8 - Une approche alternative pour retrouver ce résultat consiste à modéliser les zones de la peau et du matériau où la température varie par des résistances thermiques de longueurs ℓ_1 et ℓ_2. Représenter le schéma électrique équivalent, et retrouver l'expression de T_0 en utilisant un « théorème » d'électronique bien connu.

C - Second modèle : résolution analytique de l'équation de la chaleur

On admet que la fonction

$$f_i(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2D_i t}} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u \,.$$

est une [1] solution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle dans le milieu i de diffusivité D_i. On indique que

$$\lim_{X \to \pm\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \pm 1 \,.$$

9 - On cherche dans le matériau 1 une solution de la forme

$$T(x < 0, t) = A + B\, f_1(x,t)\,.$$

Déterminer les constantes A et B permettant de vérifier les conditions aux limites. Vérifier que la solution est compatible avec la condition initiale d'une température uniformément égale à T_1.

10 - De même, déterminer les constantes C et D permettant d'écrire dans la matériau 2

$$T(x > 0, t) = C + D\, f_2(x,t)\,.$$

11 - Montrer que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}(x\!=\!0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi D_i t}}\,.$$

Écrire la continuité du vecteur densité de courant thermique en $x = 0$ à tout instant, et conclure sur la température de contact T_0. Commenter le résultat obtenu.

12 - Quel est le secret (ou le coup de chance) permettant au premier modèle, pourtant bien plus rudimentaire, de donner un résultat aussi pertinent ?

1. N'allez pas croire que c'est la seule, ni qu'elle marche à tous les coups !