



Ondes électromagnétiques

Communication avec un satellite

1 L'onde incidente se propage dans le sens des z croissants. Sa polarisation est rectiligne selon \vec{e}_x . D'après la relation de structure,

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y.}$$

2 La force de Lorentz s'écrit

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

En ordre de grandeur,

$$\|q\vec{E}\| = q|E_0| \quad \text{et} \quad \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = qv \frac{|E_0|}{c}$$

donc

$$\frac{\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} = \frac{v}{c}.$$

La force magnétique est négligeable si $v \ll c$, c'est-à-dire si le mouvement de la charge est non relativiste.

3 Le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen. S'agissant de particules microscopiques, seule la force de Lorentz électrique est à prendre en compte. Ainsi, le PFD appliqué à chaque type de porteur donne respectivement

$$\begin{cases} m_c \frac{d\vec{v}_c}{dt} = e\vec{E} \\ m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \end{cases}$$

Le plasma compte deux types de porteurs de charges, implicitement supposés se déplaçant tous à la même vitesse (vitesse d'ensemble). La densité de courant s'écrit donc

$$\vec{j} = ne\vec{v}_c + n(-e)\vec{v}_e = ne(\vec{v}_c - \vec{v}_e).$$

On en déduit

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne \left(\frac{d\vec{v}_c}{dt} - \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right) = ne \left(\frac{e}{m_c} \vec{E} + \frac{e}{m_e} \vec{E} \right)$$

ce qui donne bien

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = ne^2 \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_c} \right) \vec{E}.$$

Le passage des dérivées droites du PFD à la dérivée partielle du résultat manque ici de rigueur ... mais ladite rigueur est difficilement accessible avec le programme de PT. Le « problème » (ou la « solution », selon les points de vue) vient du fait que les vitesses \vec{v}_e et \vec{v}_c sont des grandeurs lagrangiennes, attachées à un électron ou un cation particulier, alors que la densité de courant \vec{j} est une grandeur eulérienne, c'est-à-dire un champ dépendant de l'espace et du temps.

4 Un proton pèse environ $1,6 \cdot 10^{-27}$ kg, autant qu'un neutron, si bien qu'en supposant que le cation compte dans son noyau une dizaine de protons et de neutron on trouve une masse $m_c \sim 10^{-26}$ kg. Un électron ne pèse que $9 \cdot 10^{-31}$ kg, soit près de 10 000 fois moins. Ainsi, on peut supposer $1/m_c \ll 1/m_e$ et écrire l'expression précédente sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}.}$$

5 Comme les cations et les électrons sont de même densité volumique, le plasma est neutre : $\rho = ne - ne = 0$. En utilisant la formule du double rotationnel,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MG}}}{=} 0 - \Delta \vec{E}$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MF}}}{=} -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwartz}}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{MA}}}{=} -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Utiliser la question précédente conduit à

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\mu_0 n e^2}{m_e} \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

En identifiant les deux expressions,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\mu_0 n e^2}{m_e} \vec{E} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\mu_0 c^2 n e^2}{m_e} \vec{E}$$

ce qui s'écrit encore

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ \omega_p = \sqrt{\frac{n e^2 \mu_0 c^2}{m_e}} = \sqrt{\frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \end{cases}$$

6 Pour une onde de la forme $\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$,

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}.$$

En injectant dans l'équation de propagation,

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

soit encore

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Comme le signe de $\omega^2 - \omega_p^2$ est inconnu, il est impossible d'aller plus loin dans le calcul, et en particulier impossible de passer à une racine. Ainsi, la relation de dispersion concerne k^2 .

7 Pour $\omega < \omega_p$, la relation de dispersion donne $k^2 < 0$ donc k imaginaire pur,

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm \frac{i}{\delta}.$$

L'onde s'écrit alors

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{i\omega t} e^{\pm z/\delta} \vec{e}_x.$$

L'onde ne pouvant s'amplifier spontanément (ni diverger), seul le signe $-$ est physiquement pertinent. L'onde est amortie exponentiellement sur une distance caractéristique δ , **elle ne peut donc pas traverser l'ionosphère** : la communication avec le satellite est impossible avec des ondes de pulsation $\omega < \omega_p$. Au contraire, si $\omega > \omega_p$ alors k est réel,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}},$$

et l'onde conserve sa structure d'OPPH dans l'ionosphère.

La forme d'onde étant donnée comme une seule pseudo-OPPH, il n'est pas nécessaire ici de la chercher comme une combinaison linéaire.

Par ailleurs, notons que les dépendances en temps et en espace dans l'expression de \vec{E} pour $\omega < \omega_p$ sont factorisées dans deux fonctions indépendantes. L'onde obtenue dans l'ionosphère est donc une onde stationnaire.

8 La fréquence plasma de l'ionosphère est donc de l'ordre de $1,6 \cdot 10^6$ Hz, soit 1,6 MHz. Les fréquences utilisées sont très supérieures, ce qui garantit que les ondes traversent l'ionosphère sans dommage.