DM 15 – à rendre mercredi 19 mars

Correction

Interférences

Interférences à trois ondes

PT A 2017

Système interférentiel à deux fentes

1 Cours Les deux « théorèmes utiles » sont le **théorème de Malus** qui stipule que les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux, et le **principe de retour inverse de la lumière**, qui affirme l'égalité des chemins optiques quel que soit le sens de parcours des rayons lumineux. Calculons la différence de marche

$$\delta = (SF_2M) - (SF_1M)\,.$$

Comme la source S est au foyer de la lentille, alors les rayons émergents sont parallèles, donc les surfaces d'ondes sont planes et par conséquent F_1 et F_2 appartiennent au même plan d'onde. On en déduit

$$(SF_1) = (SF_2)\,.$$

Raisonnons avec la figure 1. Si la source était située en M, alors d'après le théorème de Malus H et S_1 appartiendraient au même plan d'onde, d'où on déduit avec le principe de retour inverse

$$(F_1M) = (HM)\,.$$

Ainsi,

$$\delta = \cancel{(SF_2)} + (F_2H) + \cancel{(HM)} - \cancel{(SF_1)} - \cancel{(F_1M)} = (F_2H)\,.$$

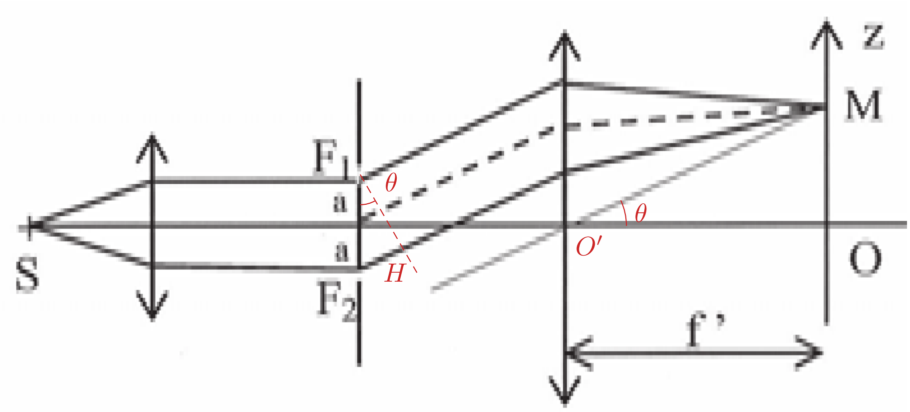

Figure 1 – Différence de marche dans le système à deux fentes.

Introduisons l'angle θ, qui se retrouve à deux endroits de la figure. En raisonnant dans le triangle F_1F_2H,

$$\sin\theta = \frac{F_2H}{F_1F_2} = \frac{\delta}{2a}$$

et dans le triangle $O'OM$,

$$\tan\theta = \frac{OM}{O'O} = \frac{z}{f'}\,.$$

Les rayons étant peu inclinés, l'angle θ est faible, et par des développements limités on obtient

$$\theta = \frac{\delta}{2a} = \frac{z}{f'} \qquad \text{d'où} \qquad \delta = \frac{2a\,z}{f'}\,.$$

On en déduit le déphasage,

$$2\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{2a\,z}{f'} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{az}{f'}\,.}$$

2 Cours Les deux ondes qui interfèrent étant déphasées de 2φ, on a d'après la formule de Fresnel,

$$\boxed{E = 2E_0\left[1+\cos(2\varphi)\right]\,.}$$

Tracé sur la figure 2.

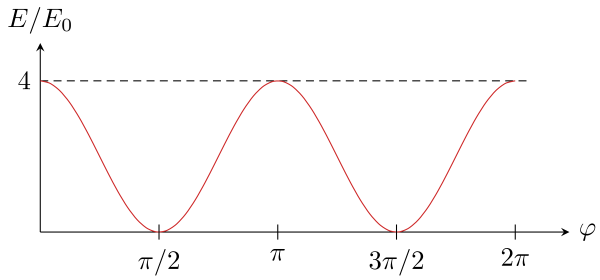

Figure 2 – Éclairement du système à deux fentes en fonction du déphasage.

Système interférentiel à trois fentes

3 Au point M se superposent les trois ondes passées par les trois fentes F_0, F_1 et F_2. En reprenant les notations de la partie précédente, comme le rayon central sert de référence de phase, l'amplitude complexe totale en M s'écrit

$$\underline{s} = s_0 + \underline{s_1} + \underline{s_2} = s_0\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) = s_0(1+2\cos\varphi)\,.$$

On en déduit l'éclairement,

$$E = |\underline{s}|^2 = |s_0|^2\,(1+2\cos\varphi)^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E = E_0\,(1+2\cos\varphi)^2\,.}$$

4 On trouve

φ	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π
E/E_0	9	0	1	0	9

5 Tracé sur la figure 3.

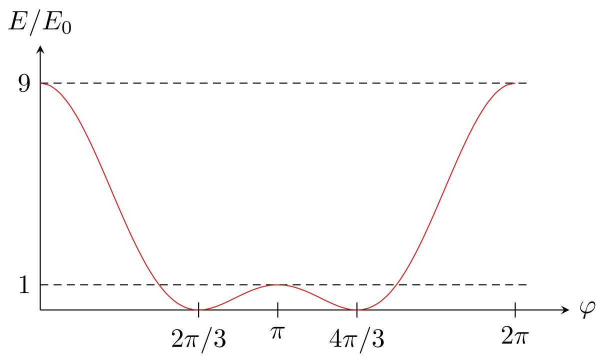

Figure 3 – Éclairement du système à trois fentes en fonction du déphasage.

Application à la mesure d'épaisseur d'une lame de verre

$\boxed{6}$ Si la lame induit un retard de phase de $\pi/2$, alors l'amplitude s_0 doit être remplacée par $\underline{s_0'} = s_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -\mathrm{j}\,s_0$. On a alors

$$\underline{s'} = \underline{s_0'} + \underline{s_1} + \underline{s_2} = s_0\left(-\mathrm{j} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right) = s_0(-\mathrm{j} + 2\cos\varphi)\,,$$

Il s'agit d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique, donc on a directement

$$\begin{aligned} E' &= |\underline{s'}|^2 \\ &= E_0\left(1^2 + (2\cos\varphi)^2\right) \\ &= E_0\left(1 + 4\cos^2\varphi\right) \\ &= E_0\left(1 + 4\,\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E' = E_0\left(3 + 2\cos(2\varphi)\right)\,.}$$

On retrouve bien une écriture analogue à la formule de Fresnel, donc une alternance régulière de franges brillantes et sombres, mais les franges sombres ne sont pas parfaitement noires car E' est comprise entre E_0 et $5E_0$.

$\boxed{7}$ **Classique** Lorsque le rayon traverse la lame, cela lui confère un chemin optique supplémentaire $(n-1)e$: la longueur e est parcourue dans un milieu d'indice n au lieu d'un milieu d'indice 1. Le déphasage correspondant vaut donc

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)e\,.$$

Pour avoir $\Delta\varphi = \pi/2$, il faut donc choisir comme longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{\pi/2}(n-1)e \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\lambda = 4(n-1)e = 0{,}6\,\mu\mathrm{m}\,.}$$

$\boxed{8}$ **Difficile** Les fentes sont supposées se trouver dans le plan focal objet de la lentille ... ce que l'énoncé dit indirectement et absolument pas clairement via la définition de α.

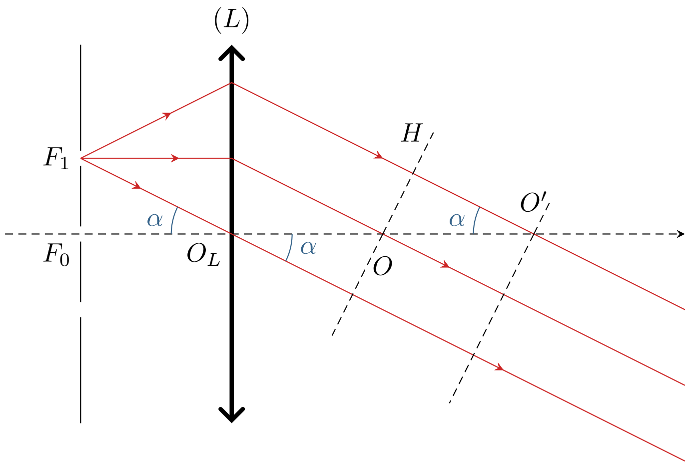

Figure 4 – Montage à trois fentes en présence d'une lame.

Raisonnons avec les notations de la figure 4, en supposant d'abord que la lame **n'est pas** insérée. La différence de marche entre les deux rayons passant par F_0 et F_1 au point O' s'écrit

$$\delta(O') = (F_1O') - (F_0O')\,.$$

D'après le théorème de Malus, H et O appartiennent au même plan d'onde, donc

$$(F_1H) = (F_1O)\,.$$

Ainsi,

$$\delta(O') = (F_1H) + (HO') - (F_0O') = (F_1O) + (HO') - (F_0O')\,.$$

Décomposons maintenant le chemin optique (F_0O') :

$$\delta = (F_1O) + (HO') - (F_0O) - (OO')\,.$$

Comme les rayons issus de F_0 et F_1 sont en phase en O en l'absence de lame, on a donc $(F_0O) = (F_1O)$, d'où

$$\delta(O') = (HO') - (OO') = (HO') - x\,.$$

Enfin, en raisonnant dans le triangle HOO', $HO' = OO'\,\cos\alpha = x\cos\alpha$, on en conclut

$$\delta = x\,(\cos\alpha - 1)\ .$$

Pour prendre en compte la présence de la lame, il faut rajouter le chemin optique supplémentaire $(n-1)e$ au trajet de l'onde issue de F_0, donc avec un signe $\ominus$ dans la différence de marche. Sachant que les trois ondes y sont en phase, on a

$$\delta_{\text{lame}} = x\,(\cos\alpha - 1) - (n-1)e \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en phase}}}{=} 0\,.$$

On en déduit finalement

$$\boxed{x = -\frac{(n-1)e}{1-\cos\alpha}\,.}$$

Ce raisonnement est affreusement compliqué, et me semble très clairement hors de portée même des bons candidats. En même temps, il s'agit de la dernière question du sujet ou presque ...

9 Par un développement limité du cosinus,

$$x = -\frac{(n-1)e}{1-\cos\alpha} = -\frac{(n-1)e}{\alpha^2/2} = -\frac{2(n-1)ef'^2}{a^2}$$

d'où on déduit

$$\boxed{e = \frac{|x|\ a^2}{2(n-1)f'^2} = 0{,}01\,\mu\text{m}\,.}$$

Je suis assez dubitatif sur l'ordre de grandeur de l'épaisseur obtenue : je doute qu'une lame de verre aussi fine puisse être usinée et tenue mécaniquement pour pouvoir être insérée dans l'interféromètre ... À titre de comparaison, une lamelle de microscope a une épaisseur de 150 µm, une feuille de papier d'environ 60 µm, soit plus de 1000 fois plus que la prétendue lame envisagée par l'énoncé ...