Circuits résistifs

I - Une lampe qui donne tout

Tous les schémas sont représentés figure 1.

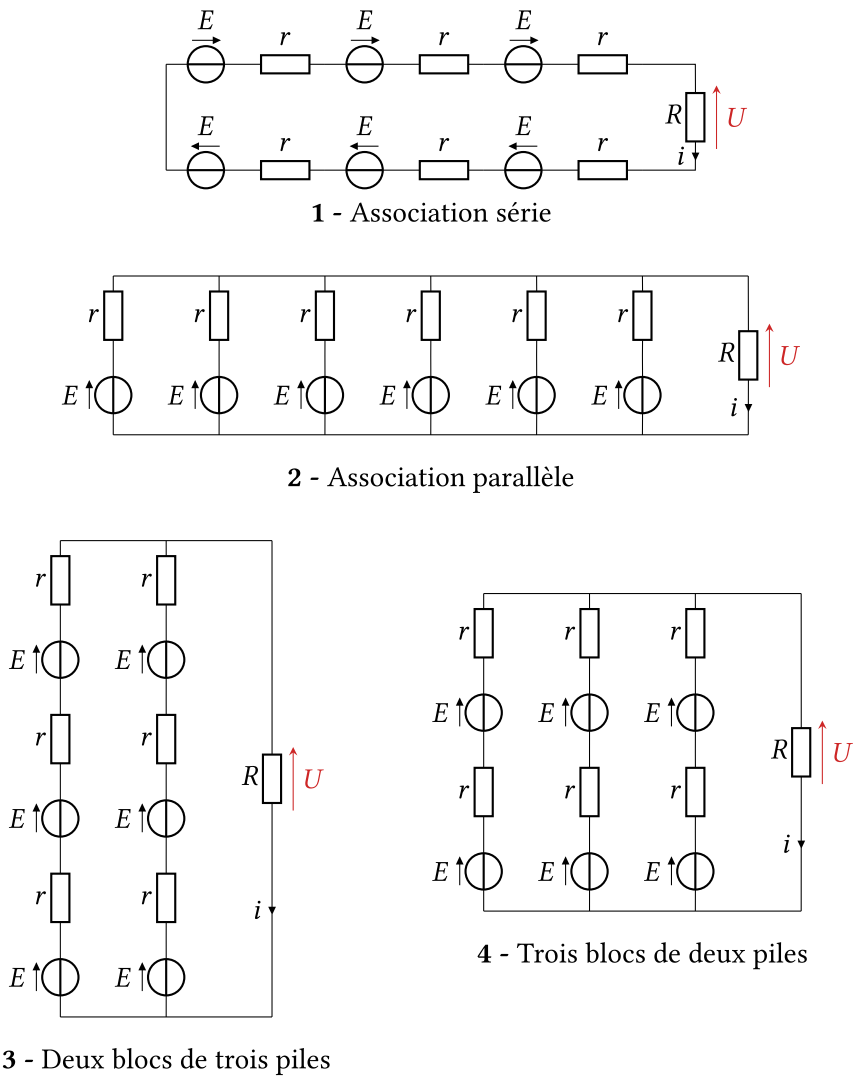

Figure 1 – Schéma des différentes associations envisagées.

1 D'après la loi des mailles,

$$6E = Ri + 6ri \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i = \frac{6E}{R+6r}}$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{36RE^2}{(R+6r)^2}\,.}$$

$\boxed{2}$ Tous les générateurs étant identiques, ils sont traversés par le même courant égal à $i/6$ d'après la loi des nœuds. Ainsi,

$$U = Ri = E - r\frac{i}{6} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i = \frac{6E}{6R + r}}$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{36RE^2}{(6R + r)^2}\,.}$$

> *Attention ! Dans ce montage, ni les résistances ni les sources idéales de tension ne sont montées en parallèle. Il n'est donc pas possible d'identifier la moindre résistance équivalente.*

$\boxed{3}$ Les deux blocs sont identiques, donc traversés par le même courant $i/2$. D'après la loi des mailles,

$$U = Ri = 3E - 3r\frac{i}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i = \frac{6E}{2R + 3r}}$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{36RE^2}{(2R + 3r)^2}\,.}$$

> *Attention ! Dans ce montage les résistances sont montées en série « trois par trois » : on peut donc éventuellement identifier une résistance équivalente 3r (même si ça ne simplifie pas grand chose). En revanche, ces deux résistances équivalentes ne sont pas montées en parallèle à cause des sources de tension.*

$\boxed{4}$ Comme précédemment,

$$U = Ri = 2E - 2r\frac{i}{3} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i = \frac{6E}{3R + 2r}}$$

et ainsi

$$\boxed{\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{36RE^2}{(3R + 2r)^2}\,.}$$

$\boxed{5}$ En supposant $R = 2r$, les expressions se simplifient en

$$\mathcal{P}_1 = \frac{72rE^2}{(8r)^2} \qquad \mathcal{P}_2 = \frac{72rE^2}{(13r)^2}$$
$$\mathcal{P}_3 = \frac{72rE^2}{(7r)^2} \qquad \mathcal{P}_4 = \frac{72rE^2}{(8r)^2}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}_3 > \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_4 > \mathcal{P}_2\,.$$

C'est donc la **configuration à deux blocs de trois piles** qui permet de faire briller le plus la lampe.

> *Le but de la question étant de comparer ces expressions, simplifier au maximum les fractions n'est pas forcément le plus efficace.*

$\boxed{6}$ Étudions la fonction $\mathcal{P}_3 = \dfrac{36RE^2}{(2R+3r)^2}$ vue comme une fonction de la résistance R. Dérivons-là pour trouver son maximum,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_3}{\mathrm{d}R} &= 36E^2 \times \frac{(2R + 3r)^2 - 2 \times (2R + 3r) \times 2}{(2R + 3r)^4} \\
&= 36E^2 \times \frac{(2R + 3r)}{(2R + 3r)^4}\left((2R + 3r) - 4R\right) \\
&= 36E^2 \times \frac{(-2R + 3r)}{(2R + 3r)^3}
\end{aligned}$$

> *Prenez l'habitude de travailler au maximum avec les notations de la physique, sans avoir besoin de revenir aux notations des maths. Poser $f(R) = \mathcal{P}$ et dire que l'on calcule $f'(R)$ n'est pas une bonne habitude (même si ce n'est pas très grave !).*
>
> *Le calcul de la dérivée utilise la formule*
>
> $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
>
> *en utilisant*
>
> $$v(R) = (2R+3r)^2 = w(R)^2 \qquad \text{donc} \qquad v'(R) = 2\,w(R)\,w'(R)\,.$$

La dérivée s'annule pour

$$\boxed{R^\star = \frac{3}{2}r\,,}$$

c'est donc pour cette valeur que la puissance dissipée dans l'ampoule est maximale.

> *On peut justifier qu'il s'agit bien d'un maximum en remarquant que la fonction $R \mapsto \mathcal{P}_3(R)$ est positive pour tout $R > 0$, nulle en $R = 0$ et pour $R \to \infty$: si elle admet un unique extrêmum sur $\mathbb{R}_+$, il ne peut s'agir que d'un maximum. Néanmoins, un tel niveau de précision est indispensable sur une copie de mathématiques mais il y a plus de tolérance dans une copie de physique.*

II - Résistances équivalentes et casques de réalité virtuelle

7 Un casque éteint ne doit consommer aucune puissance, donc être traversé par un courant nul, ce qui correspond bien à un interrupteur ouvert. Les casques ne peuvent pas être associés en série car dès que l'un d'eux est éteint plus aucun courant ne peut circuler dans aucun casque.

8 Si les N casques sont montés en parallèle alors ils sont équivalents à une résistance R/N, qui dépend du nombre de casques : cette association ne convient donc pas.

9 L'association de deux casques est équivalente à une résistance

$$\boxed{R_2 = \frac{R}{2}\,.}$$

Raisonnons sur le montage figure 2. L'association parallèle des deux résistances R vaut $R/2$, donc la portion encadrée en rouge a pour résistance équivalente

$$R_{\text{éq}} = r + \frac{R}{2}\,.$$

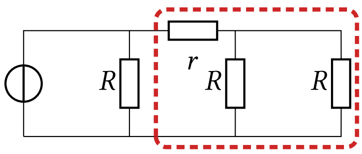

Figure 2 – Montage à trois casques.

Or pour que le montage à trois casques soit équivalent au montage à deux casques, il faut que la résistance $R_{\text{éq}}$ s'identifie à la résistance R. On en déduit qu'il faut avoir

$$\boxed{r = \frac{R}{2}\,.}$$

On a alors $R_3 = R_2 = R/2$.

> *Remarquez que j'ai ici raisonné directement sur le montage lui-même, pour ne pas avoir à calculer la résistance équivalente totale, ce qui allège considérablement les calculs. Bien sûr, ce raccourci n'est pas*

> *possible dans toutes les situations !*

$\boxed{10}$ Considérons une association de N casques, et montrons par récurrence qu'elle équivaut à une résistance $R_N = R/2$ pour tout $N \geq 2$.

- **Initialisation :** les deux questions précédentes montrent que

$$R_2 = R_3 = \frac{R}{2}\,.$$

- **Hérédité :** Soit $N \geq 4$ fixé, et supposons que $R_N = R/2$. Montrons à l'aide des schémas figure 3 que $R_{N+1} = R/2$.

On retrouve sur le schéma à $N+1$ casques la même association encadrée en rouge qu'à la question précédente, dont on a montré qu'elle était équivalente à une résistance R. Ainsi, le montage à $N+1$ casques est équivalent au montage à N casques : leurs résistances équivalentes sont donc égales,

$$R_{N+1} = R_N = \frac{R}{2}\,.$$

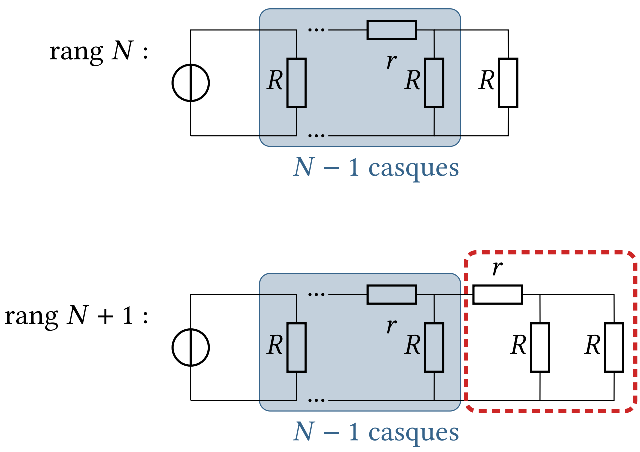

Figure 3 – Schémas des montages utiles au raisonnement par récurrence.

- **Conclusion :** le schéma d'association envisagé permet bien d'avoir une résistance équivalente indépendante du nombre N de casques connectés, toujours égale à $R/2$.