Correction

Bilan d'énergie électrique

Alimentation électrique d'un TGV

A - Étude du circuit

1 La résistance étant proportionnelle à la longueur de câble,

$$\boxed{R_1(x) = \rho x = \frac{x}{\ell}R \qquad \text{et} \qquad R_2(x) = \rho(\ell - x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)R\,.}$$

2 D'après la loi des mailles appliquée dans la grande maille

$$E + R_1 I_1 = E + R_2 I_2 \qquad \text{donc} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2\,.$$

D'après la loi des nœuds,

$$I_0 = I_1 + I_2$$

En procédant par substitution, il vient

$$\boxed{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0 \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0\,.}$$

Comme $R_1 + R_2 = R$, on en déduit

$$\boxed{I_1 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) I_0 \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{x}{\ell} I_0\,.}$$

3 Il suffit de réutiliser l'expression issue de la loi des mailles,

$$U = E - R_1 I_1 = E - \frac{x}{\ell} R \times \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) I_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{U = E - R I_0 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\,.}$$

4 La source de courant est orientée en convention récepteur, la puissance reçue est donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{TGV}} = U I_0 = E I_0 - R {I_0}^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\,.}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{cat}} &= R_1 {I_1}^2 + R_2 {I_2}^2 \\
&= R {I_0}^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 + R {I_0}^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\frac{x^2}{\ell^2} \\
&= R {I_0}^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{x}{\ell} + \frac{x}{\ell}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{cat}} = R {I_0}^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$

Enfin,

$$\mathcal{P}_{\text{alim}} = EI_1 + EI_2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathcal{P}_{\text{alim}} = EI_0 \,.}$$

5 On constate

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{alim}} = \mathcal{P}_{\text{TGV}} + \mathcal{P}_{\text{cat}} \,.}$$

La puissance fournie par les sous-stations est ou bien dissipée par effet Joule, ou bien reçue par la motrice du TGV : c'est la conservation de l'énergie.

B - Rendement du dispositif

6 Le TGV parcourt une distance ℓ à la vitesse v, ce qui lui prend un temps

$$\boxed{T = \frac{\ell}{v} \,.}$$

7 Comme le TGV roule à la vitesse v et se trouve en $x = 0$ à l'instant $t = 0$, il se trouve à l'instant t en $x = vt$. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{\text{cat}}(t) = R{I_0}^2 \frac{vt}{\ell}\left(1 - \frac{vt}{\ell}\right) = R{I_0}^2 \frac{vt(\ell - vt)}{\ell^2}$$

8 Par définition,

$$\begin{aligned}
W_{\text{cat}} &= \int_0^T R{I_0}^2 \frac{vt(\ell - vt)}{\ell^2}\,\mathrm{d}t \\
&= R{I_0}^2 \frac{v}{\ell^2} \int_0^T (\ell t - vt^2)\mathrm{d}t \\
&= R{I_0}^2 \frac{v}{\ell^2} \left[\frac{\ell t^2}{2} - \frac{vt^3}{3}\right]_0^T \\
&= R{I_0}^2 \frac{v}{\ell^2} \left(\frac{\ell T^2}{2} - \frac{vT^3}{3}\right) \\
&= R{I_0}^2 \frac{v}{\ell^2} \left(\frac{\ell \times \ell^2}{2v^2} - \frac{v \times \ell^3}{3v^3}\right) \\
&= R{I_0}^2 \frac{v}{\ell^2} \left(\frac{\ell^3}{2v^2} - \frac{\ell^3}{3v^2}\right) \\
&= R{I_0}^2 \frac{\ell}{v} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{W_{\text{cat}} = \frac{1}{6} R{I_0}^2 \frac{\ell}{v}}$$

9 Par définition,

$$W_{\text{alim}} = \int_0^T EI_0 \mathrm{d}t = EI_0 \int_0^T \mathrm{d}t = EI_0 T \qquad \text{soit} \qquad \boxed{W_{\text{alim}} = EI_0 \frac{\ell}{v} \,.}$$

10 Par linéarité de l'intégrale, la relation constatée question 5 sur les puissances reste valable sur les énergies, donc

$$\boxed{W_{\text{TGV}} = W_{\text{alim}} - W_{\text{cat}} = \left(E - \frac{1}{6} RI_0\right) \frac{\ell}{v} I_0 \,.}$$

11 Le rendement se définit par

$$\eta = \frac{W_{\text{TGV}}}{W_{\text{alim}}} = 1 - \frac{W_{\text{cat}}}{W_{\text{alim}}} = 1 - \frac{RI_0}{6E}$$

Numériquement,

$$\boxed{\eta = 0{,}984 = 98{,}4\,\%\,.}$$

L'installation remplit bien son rôle : la quasi-totalité de l'énergie fournie par les sous-stations est bien reçue par le TGV.

C - Distance entre sous-stations

12 Considérons la situation extrême où le TGV appelle un courant $I_{\text{max}} = 800$ A. D'après la question 3, la tension U aux bornes de la motrice du TGV dépend de sa position,

$$U = U(x) = E - RI_{\text{max}}\frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\,.$$

Comme $0 \leq x \leq \ell$, elle est partout inférieure à E et par symétrie du dispositif il est intuitif que le minimum sera atteint en $x = \ell/2$.

> *Montrons-le :*
>
> $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = RI_{max} \times \frac{1}{\ell} \times \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + RI_{max} \times \frac{x}{\ell} \times \frac{-1}{\ell} = \frac{RI_{max}}{\ell}\left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)$$
>
> *qui s'annule effectivement en $x = \ell/2$.*

Cette tension minimale vaut

$$U_{\text{min}} = E - RI_{\text{max}}\frac{\ell/2}{\ell}\left(1 - \frac{\ell/2}{\ell}\right) = E - \frac{RI_{\text{max}}}{4}$$

La tension ne devant pas varier de plus de 20 %,

$$\frac{R \times I_{\text{max}}}{4} \leq 0{,}2\,E = \frac{E}{5} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\rho\ell I_{\text{max}}}{4} \leq \frac{E}{5}$$

et enfin

$$\boxed{\ell \leq \frac{4}{5}\frac{E}{\rho I_{\text{max}}} = 210\,\text{km}\,.}$$

La distance retenue en pratique est quatre fois inférieure à cette limite, d'une part pour garantir que le cahier des charges soit respecté en toute circonstance (on parle de coefficient de sécurité), et d'autre part pour que plusieurs trains puissent circuler sur le même tronçon en même temps.