Mouvements circulaires

Rallye automobile

A - Dérapage en virage

1 La trajectoire étant circulaire plane, $r = \rho = \text{cte}$ et $z = \text{cte}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z \qquad \leadsto \qquad \vec{v} = \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = v\,\vec{e}_\theta \qquad \leadsto \qquad \vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_\theta - v\dot{\theta}\,\vec{e}_r$$

et comme $\dot{\theta} = v/\rho$, on peut finalement identifier

$$\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta\,.}$$

> *On peut remarquer que l'on retrouve sans surprise l'expression de l'accélération dans la base de Frénet, puisque $\vec{e}_\theta = \vec{e}_t$ et $\vec{e}_r = -\vec{e}_n$.*

2 • **Système :** voiture ;

- **Référentiel galiléen :** terrestre ;
- **Repérage :** cf. question précédente ;
- **Bilan des forces :**
  - ▹ poids : $\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$;
  - ▹ force de motorisation : $\vec{F} = F\,\vec{e}_\theta$;
  - ▹ force de réaction exercée par la route : $\vec{R} = R_t\,\vec{e}_r + R_n\,\vec{e}_z$.
- **PFD :**

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} -m\dfrac{v^2}{\rho} = R_t \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F \\ 0 = -mg + R_n \end{cases}$$

En tenant compte de l'hypothèse de vitesse constante, on en déduit

$$\boxed{\vec{F} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{R} = -m\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_r + mg\,\vec{e}_z\,.}$$

3 La voiture dérape si

$$m\frac{v^2}{\rho} > \lambda mg \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v > \sqrt{\lambda\rho g} = 12{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 45{,}1\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

4 La trajectoire étant la même, l'accélération garde la même expression dans la base cylindrique. Dans la base inclinée,

$$\vec{e}_r = \cos\alpha\,\vec{e}_t - \sin\alpha\,\vec{e}_n \qquad \text{et} \qquad \vec{e}_z = \sin\alpha\,\vec{e}_t + \cos\alpha\,\vec{e}_n$$

d'où on déduit, sachant que le mouvement est uniforme,

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{\rho}\cos\alpha = R_t - mg\sin\alpha \\ 0 = F \\ m\dfrac{v^2}{\rho}\sin\alpha = -mg\cos\alpha + R_n \end{cases}$$

et ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{R} = -m\left(\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha - g\sin\alpha\right)\overrightarrow{e}_t + m\left(\frac{v^2}{\rho}\sin\alpha + g\cos\alpha\right)\overrightarrow{e}_n\,.}$$

> *Il est en fait suffisant de projeter dans la base inclinée l'expression de $\overrightarrow{R}$ obtenue précédemment dans la base cylindrique, mais il est nécessaire de justifier au préalable que l'accélération reste inchangée.*

5 Le signe de R_t est relié à la vitesse par

$$R_t > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha - g\sin\alpha < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{v < \sqrt{\rho g\tan\alpha}\,.}$$

Le force de frottement exercée par le sol s'oppose au mouvement spontané du véhicule. Si la voiture tend à déraper vers l'extérieur, c'est que la force exercée par la route la maintient vers l'intérieur, donc que $R_t < 0$. Cette situation peut se produire **pour des vitesses élevées** $v > \sqrt{\rho g\tan\alpha}$, ce qui est conforme à l'intuition.

> *Attention au contre-sens, ce n'est pas la force $\overrightarrow{R}_t$ qui fait déraper la voiture, au contraire ! Comme il s'agit d'une force de frottement celle-ci* s'oppose *au dérapage.*

6 En supposant $R_t < 0$, la condition de non-dérapage s'écrit

$$\cancel{m}\left(\frac{v^2}{\rho}\cos\alpha - g\sin\alpha\right) < \lambda\cancel{m}\left(\frac{v^2}{\rho}\sin\alpha + g\cos\alpha\right)$$

qui devient

$$v^2(\cos\alpha - \lambda\sin\alpha) < \rho g(\sin\alpha + \lambda\cos\alpha) \tag{1}$$

et ainsi

$$\boxed{v < \sqrt{\rho g\frac{\sin\alpha + \lambda\cos\alpha}{\cos\alpha - \lambda\sin\alpha}} = \sqrt{\rho g\frac{\lambda + \tan\alpha}{1 - \lambda\tan\alpha}}\,.}$$

7 L'inégalité ci-dessus est vérifiée pour toute vitesse si le membre de gauche de l'inégalité (1) est négatif, c'est-à-dire si

$$\cos\alpha - \lambda\sin\alpha < 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\alpha > \arctan\frac{1}{\lambda} = 51{,}3°\,.}$$

> *Déterminer la valeur de α pour laquelle $v_{max} \to \infty$ permet de retrouver la bonne valeur pour la limite, mais en revanche ne donne pas l'inégalité.*

B - Décollage sur une route bosselée

- **Système :** voiture
- **Référentiel galiléen :** terrestre
- **Repérage :** le mouvement est circulaire de rayon $\rho =$ cte, donc

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e}_r \qquad \rightsquigarrow \qquad \overrightarrow{v} = \rho\dot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \overrightarrow{a} = -\rho\dot\theta^2\,\overrightarrow{e}_r + \rho\ddot\theta\,\overrightarrow{e}_\theta\,.$$

- **Bilan des forces :**

- poids $\overrightarrow{P} = -mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$;
- force de motorisation $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e_\theta}$;
- force de réaction de la route $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{e_r}$.

8 • **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} -m\rho\dot\theta^2 = -mg\cos\theta + R \\ m\rho\ddot\theta = mg\sin\theta + F \end{cases}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\overrightarrow{F} = m\left(\rho\ddot\theta - g\sin\theta\right)\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{R} = m\left(g\cos\theta - \rho\dot\theta^2\right)\overrightarrow{e_r}\,.}$$

9 Multiplions par $\dot\theta$ la projection du PFD sur $\overrightarrow{e_\theta}$,

$$m\rho\,\ddot\theta\,\dot\theta = mg\,\dot\theta\sin\theta + F\dot\theta \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\rho\frac{\dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta - F\theta\right) = 0$$

d'où on déduit

$$m\rho\frac{\dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta - F\theta = K = \text{cte}\,.$$

On peut alors isoler $m\rho\dot\theta^2$ et réinjecter dans la projection du PFD sur $\overrightarrow{e_r}$,

$$m\rho\dot\theta^2 = 2F\theta - 2mg\cos\theta + 2K$$

d'où on déduit

$$-2F\theta + 2mg\cos\theta - 2K = -mg\cos\theta + R$$

et ainsi

$$\boxed{R = 3mg\cos\theta - 2F\theta - 2K\,,}$$

ce qui est bien de la forme demandée en posant la constante cherchée égale à $2K$.

10 Au début de la bosse, la condition initiale s'écrit

$$R(\theta = -\pi/6) = mg\cos\frac{\pi}{6} - m\rho\dot\theta^2 = mg\frac{\sqrt3}{2} - m\frac{v_0^2}{\rho}$$

et on peut identifier avec l'expression établie précédemment,

$$R(\theta = \pi/6) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} 3mg\frac{\sqrt3}{2} + 2F\frac{\pi}{6} - K \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} mg\frac{\sqrt3}{2} - m\frac{v_0^2}{\rho} \qquad \text{d'où} \qquad K = m\frac{v_0^2}{\rho} + mg\sqrt3 + 2F\frac{\pi}{6}\,.$$

On en déduit finalement

$$\boxed{R = 3mg\cos\theta - 2F\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) - m\frac{v_0^2}{\rho} - mg\sqrt3\,.}$$

Les termes dépendant de θ étant bornés, on en déduit qu'**il existe forcément une valeur de v_0 pour laquelle R s'annule** et devient négative, et donc à partir de laquelle la voiture décolle.

11 La norme R s'annule pour θ tel que

$$\cos\theta = \underbrace{\frac{2F}{3mg}}_{=a}\,\theta + \underbrace{\frac{2F}{3mg}\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt3}{3} + \frac{v_0^{\,2}}{3\rho g}}_{=b}\,.$$

Graphiquement, le membre de droite se représente par droite affine dont l'ordonnée à l'origine est d'autant plus élevée que la vitesse v_0 est élevée. On en déduit les représentations et interprétations de la figure 1.

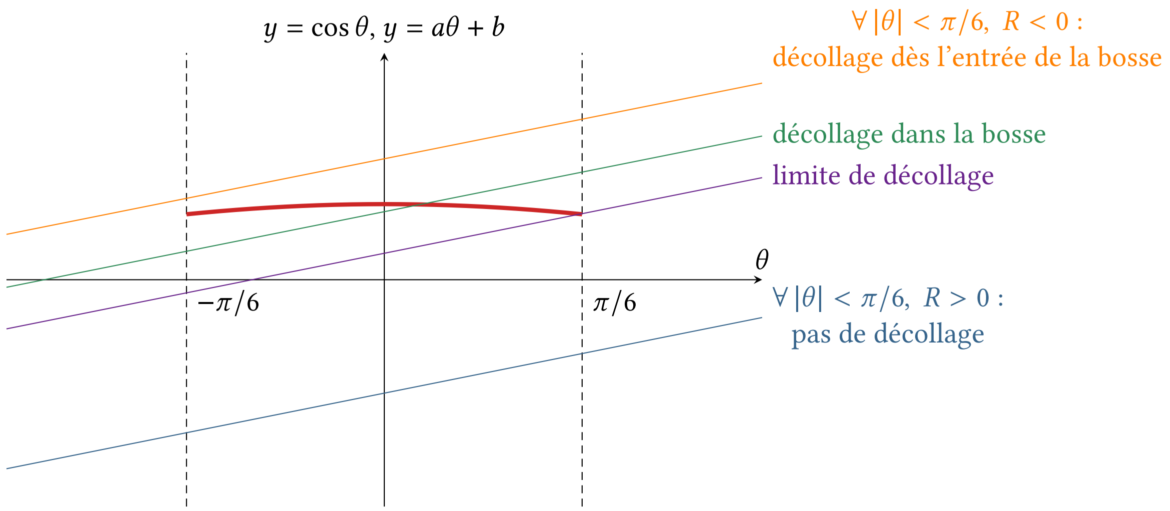

Figure 1 – Annulation éventuelle de la force de réaction.

Cette représentation graphique montre qu'à la vitesse minimale permettant le décollage celui-ci a lieu en $\theta = \pi/6$. En repartant de l'expression de R,

$$R(\pi/6) = 0 = 3mg\frac{\sqrt{3}}{2} - 2F\frac{\pi}{3} - m\frac{v_{0\,\mathrm{min}}^2}{\rho} - mg\sqrt{3} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - 2F\frac{\pi}{3} - m\frac{v_{0\,\mathrm{min}}^2}{\rho}$$

d'où on déduit

$$\boxed{v_{0\,\mathrm{min}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho g - \frac{2\pi}{3}\frac{\rho F}{m}}\,.}$$