Ondes stationnaires

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Piscine à vagues

Compte tenu de sa petite taille, les vagues d'une piscine ne sont pas de la même nature que celles de la houle : au lieu d'être des ondes progressives, ce sont des ondes stationnaires correspondant aux modes propres de la piscine.

Une technique de génération des vagues consiste à utiliser des injecteurs convenablement placés et synchronisés. Un injecteur est un dispositif qui propulse puis aspire en alternance de l'eau verticalement. Ils sont placés au fond de la piscine, sous les ventres de vibration, voir figure 1. Leur fréquence f est synchronisée avec celle correspondant à un mode propre de vibration de l'onde stationnaire.

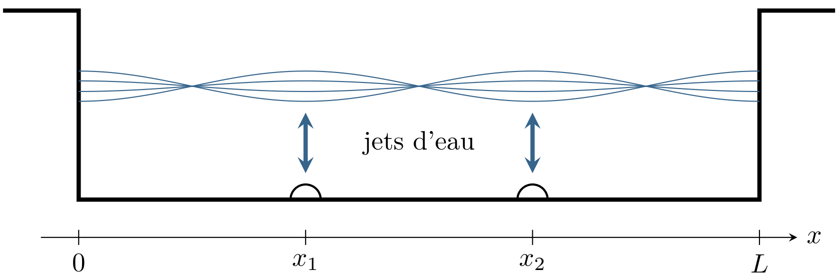

Figure 1 – Production des vagues par des injecteurs synchronisés.

On cherche une expression de la hauteur d'eau dans la piscine sous la forme

$$H(x,t) = H_0 + \Delta h(x,t) \qquad \text{avec} \qquad \Delta h(x,t) = H_\mathrm{m} \cos(kx+\psi)\cos(\omega t)\,,$$

où H_0 est constant et H_m, constant également, est un paramètre contrôlable par l'utilisateur.

1 - Que représentent physiquement H_0, Δh et H_m ? Identifier les conditions aux limites sur Δh avec la figure 1.

2 - Quelle est la valeur de ψ la plus simple qui soit compatible avec les conditions aux limites ? En raisonnant avec cette valeur, exprimer les vecteurs d'onde k possibles en fonction d'un entier n.

3 - Exprimer les longueurs d'onde des différents modes propres en fonction de la longueur totale L de la piscine.

Dans toute la suite, on ne s'intéresse plus qu'au mode propre représenté sur la figure 1, pour lequel deux injecteurs sont utilisés.

4 - Déterminer sa fréquence f en fonction de L et c.

5 - Représenter sur une même figure la hauteur d'eau $H_0 + \Delta h(x,t)$ à l'instant initial $t=0$, au bout d'un quart de période $t = T/4$ et au bout d'une demi période $t = T/2$. Vous veillerez à ce que les trois courbes soient identifiables sans ambiguïté.

6 - Représenter sur une même figure la hauteur d'eau $H_0 + \Delta h(x,t)$ en $x = 0$, en $x = L/4$ et en $x = L/2$. Vous veillerez à ce que les trois courbes soient identifiables sans ambiguïté.

7 - Déterminer en fonction de L les abscisses x_1 et x_2 auxquels les injecteurs doivent être placés.

8 - Les jets doivent-ils être émis au même moment par les deux injecteurs ? Si non, quel doit être le décalage temporel Δt ? L'exprimer en fonction de L et c.

9 - Combien d'injecteurs faudrait-il, où devrait-on les placer, à quelle fréquence et comment devrait-on les synchroniser pour obtenir le mode de vibration correspondant à un nœud de plus dans la même piscine ?

Étienne Thibierge, 30 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Exercice à rendre n° 2 – Correction — Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Ondes stationnaires

Piscine à vagues

1 H_0 est la **hauteur d'eau de la piscine en l'absence de vague**, Δh représente la **différence de hauteur** due à la présence des vagues dont H_m est l'**amplitude**.

On observe sur la figure 1 **deux ventres de vibration** en $x = 0$ et $x = L$. L'amplitude locale $H_\mathrm{m}\,|\cos(kx+\psi)|$ de la vague y est donc maximale, d'où

$$\boxed{\cos\psi = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(kL+\psi) = \pm 1\,.}$$

Les deux cosinus ne sont pas forcément de même signe.

2 La valeur la plus simple qui soit compatible avec la condition en $x = 0$ est

$$\boxed{\psi = 0\,.}$$

La deuxième condition aux limites devient

$$\cos(kL) = \pm 1 \qquad \text{soit} \qquad kL = n\pi, \quad n \text{ entier} \qquad \text{et} \qquad \boxed{k = \frac{n\pi}{L}, \quad n \text{ entier.}}$$

3 Puisque par définition $k = 2\pi/\lambda$, alors

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lambda = \frac{2L}{n}\,.}$$

4 Deux ventres consécutifs d'une OSH sont séparés de $\lambda/2$. On compte donc sur la figure

$$L = 3\frac{\lambda}{2}$$

D'après la relation de dispersion, $\lambda = c/f$ d'où

$$L = \frac{3c}{2f} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f = \frac{3c}{2L}\,.}$$

Attention, l'énoncé dit qu'on s'intéresse au mode représenté : il est donc indispensable de préciser la valeur de n.

5 Voir figure 2.

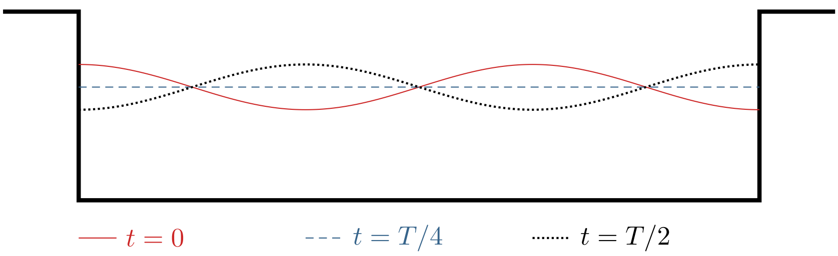

Figure 2 – Ondes stationnaires à la surface de la piscine.

Étienne Thibierge, 30 septembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

> *Il s'agit d'une représentation de type photo : graduer l'axe par le temps est une aberration !!*

6 Voir figure 3. Le point d'abscisse $x = L/4$ n'est pas situé sur un ventre de vibration, c'est pourquoi les oscillations sont d'amplitude plus faible.

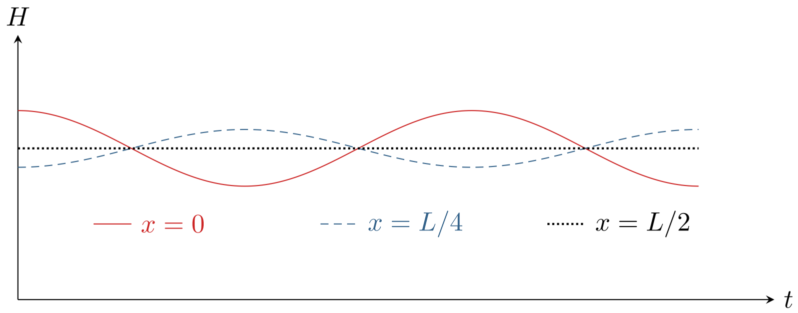

Figure 3 – Variations de hauteur d'eau au cours du temps.

> *Il s'agit cette fois de chronogrammes : graduer l'axe en x est une aberration !!*
>
> *Attention à ce que tout soit cohérent avec les figures 1 et 2, en particulier les phases initiales et les amplitudes.*

7 Les deux injecteurs doivent être placés sous les ventres, donc en $x_1 = \lambda/2$ et $x_2 = \lambda$ puisqu'un ventre se trouve en $x = 0$. Comme $\lambda = L/3$, alors

$$\boxed{x_1 = \frac{L}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2L}{3}\,.}$$

> *Une justification est évidemment attendue. Évoquer une lecture graphique ne peut pas suffire.*

8 Deux fuseaux, et donc deux ventres, consécutifs vibrent en opposition de phase. Le décalage temporel entre les deux jets doit donc correspondre à une demi-période de vibration, soit

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta t = \frac{L}{3c}\,.}$$

9 Ajouter un nœud implique d'ajouter un fuseau, donc un ventre. Il y a ainsi trois ventres à la surface de la piscine : il faut utiliser **trois injecteurs**. On a donc

$$L = \frac{\lambda'}{4} + 3\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = 4\frac{\lambda'}{2} = 2\lambda' \qquad \text{donc} \qquad \lambda' = \frac{L}{2}$$

Les injecteurs sont à placer sous les ventres de vibration, qui sont distants de $\lambda'/2$. **On doit placer les injecteurs aux points d'abscisse $L/4$, $L/2$ et $3L/4$.** D'après la relation de dispersion, les injecteurs sont à synchroniser à la fréquence

$$f' = \frac{c}{\lambda'} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f' = \frac{2c}{L}\,.}$$

Comme deux ventres consécutifs vibrent en opposition de phase, les deux injecteurs situés en $L/4$ et en $3L/4$ doivent être **synchronisés**. L'injecteur situé au milieu de la piscine doit être **décalé d'une demi-période, soit de $\Delta t' = L/4c$.**