Lois de Descartes

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Prospection sismique

On s'intéresse dans cet exercice à la prospection sismique : un micro-séisme est déclenché artificiellement en un point F de la surface terrestre, et des mesures d'échos sont réalisées en différents points M. Elles permettent d'en déduire d'éventuelles discontinuités dans la croûte terrestre et les compositions des différentes couches.

Comme pour une onde lumineuse, quand une onde sismique rencontre une surface séparant deux milieux aux propriétés physiques différentes, elle subit des phénomènes de réflexion et réfraction. Les lois de Descartes sont applicables. Les stations sismiques détectent classiquement trois trains d'ondes ayant suivi trois trajectoires différentes schématisées figure 1, appelées « rais sismiques ».

- ▷ L'onde directe (d) se propage dans la croûte terrestre en ligne droite depuis le foyer du séisme F jusqu'à la station d'observation M ;
- ▷ L'onde réfléchie (r) se propage uniquement dans le milieu supérieur mais se réfléchit sur la discontinuité ;
- ▷ L'onde conique (c) est réfractée par la discontinuité et se propage dans le milieu inférieur en longeant la discontinuité avant d'être à nouveau réfractée pour atteindre M.

On note H l'épaisseur du milieu supérieur et D la distance entre le foyer F et la station d'observation M.

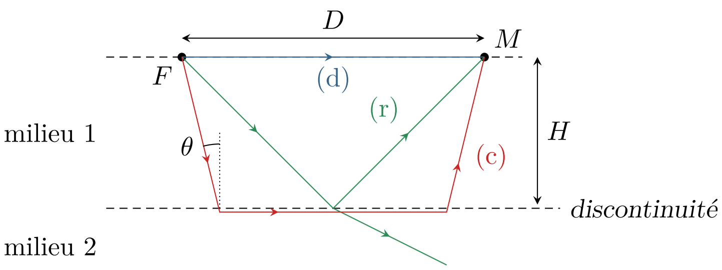

Figure 1 – Trajectoires des ondes sismiques. Version couleur sur le site de la classe.

1 - Calculer la durée de parcours Δt_d de l'onde directe et Δt_r de l'onde réfléchie. Que se passe-t-il si $D \gg H$?

2 - Montrer que la seconde loi de Descartes de la réfraction (optique) s'écrit sous la forme

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$$

où v_1 et v_2 désignent la célérité de la lumière dans les milieux 1 et 2, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.

3 - Calculer l'angle θ en fonction de v_1 et v_2. Proposer une explication au fait que l'onde soit de nouveau réfractée vers le milieu supérieur.

4 - Montrer que l'onde conique n'existe que si D est supérieure à une distance minimale D_min.

5 - Montrer d'abord que le temps de parcours de l'onde conique s'écrit

$$\Delta t_\mathrm{c} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1 \cos\theta}\left(1 - \frac{v_1 \sin\theta}{v_2}\right)$$

puis l'écrire sous la forme

$$\Delta t_\mathrm{c} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1}\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}\,.$$

Étienne Thibierge, 5 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

6 - Les temps d'arrivée des différents trains d'onde sont représentés figure 2 pour différentes valeurs de D. Identifier chaque courbe et déterminer les valeurs de H, v_1 et v_2.

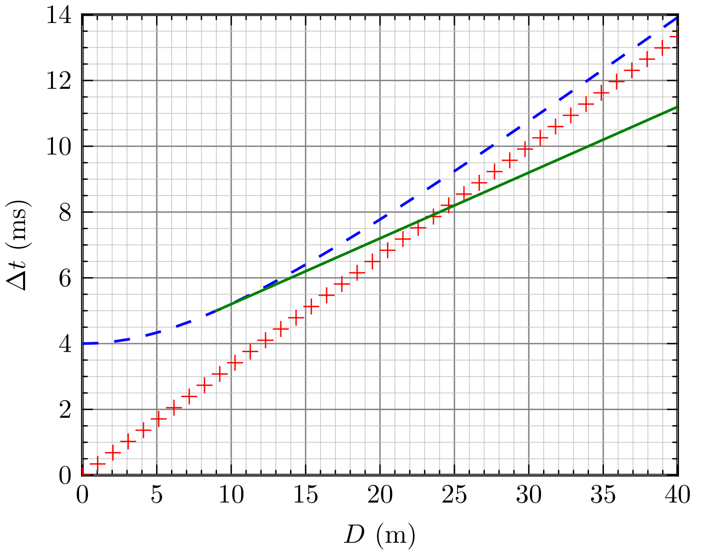

Figure 2 – Instant d'arrivée des différents trains d'onde. Version couleur sur le site de la classe.

7 - On constate figure 2 que l'onde la plus rapide change selon la distance (ici, la distance limite est de l'ordre de 25 m). Expliquer qualitativement pourquoi.

Lois de Descartes

Prospection sismique

Les diverses notations sont introduites figure 3.

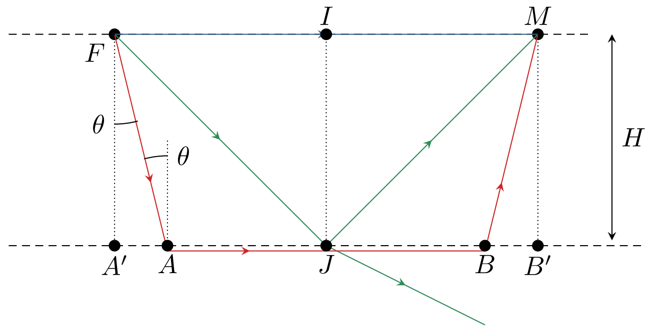

Figure 3 – Trajectoires des ondes sismiques. Version couleur sur le site de la classe.

1 L'onde directe parcourt la distance D, elle atteint donc la station en

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{d}} = \frac{D}{v_1}}.$$

Calculons la distance parcourue par l'onde (r). D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle FIJ,

$$FJ^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + H^2 \qquad \text{soit} \qquad FJ = \sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}$$

et de même pour calculer JM. On en déduit le temps de parcours

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{r}} = \frac{2}{v_1}\sqrt{\frac{D^2}{4} + H^2}}$$

Dans la limite $H \gg D$, on constate que $\Delta t_{\mathrm{r}} \simeq \Delta t_{\mathrm{d}}$: la distance supplémentaire qu'elle parcourt devient négligeable.

> *Attention, les vitesses v_1 et v_2 dépendent des milieux, mais **pas du tout des ondes !** L'onde (d) et l'onde (r) se propagent dans le même milieu, donc à la même vitesse.*

2 En utilisant les indices, la loi des sinus s'écrit

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

et comme par définition $n_{1,2} = c/v_{1,2}$ alors une simplification par c donne directement

$$\boxed{\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}}.$$

3 L'onde (c) est réfractée dans le milieu inférieur avec un angle de réfraction $\pi/2$. La seconde loi de la réfraction donne donc

$$\frac{\sin\theta}{v_1} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{v_2} \qquad \text{soit} \qquad \sin\theta = \frac{v_1}{v_2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta = \arcsin\frac{v_1}{v_2}}.$$

L'onde est réfléchie vers la surface car la discontinuité n'est pas rigoureusement plane.

4 Pour que l'onde conique existe, il faut qu'elle puisse atteindre le milieu inférieur avec la bonne inclinaison et remonter. Avec les notations de la figure 3, il faut que la distance FM soit suffisamment grande pour avoir AB non nulle. D'après le schéma,

$$AA' = BB' = H\tan\theta\,.$$

Étienne Thibierge, 5 octobre 2017, www.etienne-thibierge.fr

On en conclut que l'onde conique n'existe que si

$$\boxed{D > D_{\min} = 2H\tan\theta\,.}$$

> *Il est implicite dans la question que la distance D_{min} doit être déterminée.*

5 Les trois segments parcourus par l'onde conique ont pour longueur respective

$$FA = \frac{H}{\cos\theta} \qquad AB = D - 2H\tan\theta \qquad BM = FA = \frac{H}{\cos\theta}\,.$$

> *Si vous introduisez des points, il est plus que recommandé de le faire sur un schéma.*

La célérité étant différente selon les milieux, le temps de parcours vaut

$$\begin{aligned}\Delta t_{\mathrm{c}} &= \frac{2H}{v_1\,\cos\theta} + \frac{D-2H\tan\theta}{v_2}\\ &= \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1\,\cos\theta}\left(1 - \frac{\tan\theta}{v_2}v_1\cos\theta\right)\end{aligned} \qquad \boxed{\Delta t_{\mathrm{c}} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1\,\cos\theta}\left(1 - \frac{v_1\sin\theta}{v_2}\right)\,.}$$

D'après la question 3,

$$\Delta t_{\mathrm{c}} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1\,\cos\theta}\left(1 - \frac{{v_1}^2}{{v_2}^2}\right)$$

et comme $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$, alors

$$\Delta t_{\mathrm{c}} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1\,\sqrt{1-\frac{{v_1}^2}{{v_2}^2}}}\left(1 - \frac{{v_1}^2}{{v_2}^2}\right)$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta t_{\mathrm{c}} = \frac{D}{v_2} + \frac{2H}{v_1}\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2}\,.}$$

6 Compte tenu des questions précédentes :

- ▷ la courbe en croix rouges est une droite d'ordonnée à l'origine nulle, signe d'une relation linéaire entre Δt et D : il ne peut s'agir que de Δt_{d} ;
- ▷ la courbe en trait plein vert est une droite d'ordonnée à l'origine non-nulle, signe d'une relation affine entre Δt et D, et elle ne démarre qu'au delà d'une certaine distance : il ne peut s'agir que de Δt_{c} ;
- ▷ par élimination, la dernière courbe, qui n'est pas une droite, est forcément celle de Δt_{r}.

D'après la question 1 et par lecture graphique, la droite en croix rouge a pour pente

$$\frac{1}{v_1} = 0{,}33\,\mathrm{ms\cdot m^{-1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_1 = 3\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

D'après la question 5 et par lecture graphique, la droite verte a pour pente

$$\frac{1}{v_2} = 0{,}2\,\mathrm{ms\cdot m^{-1}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_2 = 5\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.}$$

Enfin, d'après la question 1, la courbe bleue a pour ordonée à l'origine $(D=0)$

$$\frac{2H}{v_1} = 4{,}0\,\mathrm{ms} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{H = 6{,}0\,\mathrm{m}\,.}$$

7 Pour les courtes distances, c'est l'onde directe qui est la plus rapide. Cependant, pour les grandes distances, l'onde conique devient plus rapide. Elle parcourt une plus grande distance, mais comme la célérité est supérieure dans le milieu 2, elle met globalement moins de temps à atteindre la station d'observation.