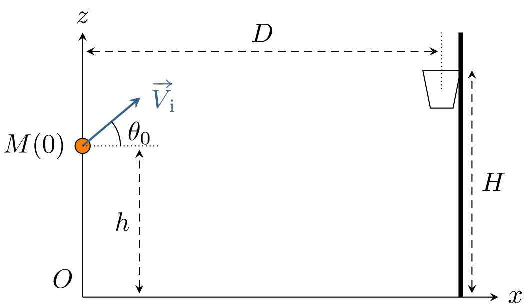
Bases de la mécanique

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Basket-ball



L'objectif de cet exercice est d'étudier les conditions nécessaires pour qu'un tir au basket-ball atteigne le panier. Un objectif officieux est également de vous faire travailler les calculs !

Le ballon est modélisé comme un point matériel M de masse m en mouvement par rapport au référentiel terrestre. Toutes les forces autres que le poids qui s'exercent sur le ballon sont négligées. Pour simplifier, on néglige également les éventuels rebonds sur le plateau perpendiculaire au panier.

À l'instant initial, le ballon quitte les mains d'un joueur à une hauteur h au dessus du sol et à distance D du panier. On note O la projection de la position initiale du ballon sur le sol, et (Ox) l'axe horizontal orienté de O vers le panier. Le joueur donne au ballon une vitesse initiale $\vec{V}_\mathrm{i}$ supposée parfaitement orientée vers le panier et formant un angle θ_0 avec l'horizontale.

Données numériques : les applications numériques sont à faire **avec votre calculatrice** à trois chiffres significatifs.
- ▷ Accélération de la pensanteur terrestre : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$;
- ▷ Masse du ballon : $m = 624\,\mathrm{g}$;
- ▷ Hauteur du panier : $H = 3{,}05\,\mathrm{m}$;
- ▷ Hauteur initiale du ballon : $h = 2{,}30\,\mathrm{m}$.

Rappel mathématique : $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$.

1 - Donner les deux lois horaires $x(t)$ et $z(t)$ du ballon. Il n'est pas demandé de démonstration (même si je vous encourage à aller revoir votre cours !), en revanche vous devez adapter les notations du cours à celles de l'exercice.

2 - Exprimer la hauteur z_1 du ballon à l'instant auquel il atteint la distance du panier, sans savoir pour le moment s'il est à la bonne hauteur. L'exprimer en fonction de g, D, h, V_i et θ_0.

3 - Établir une équation portant sur l'angle θ_0 pour que le panier soit marqué. L'écrire sous forme d'un polynôme en $\tan\theta_0$.

4 - Montrer que cette équation n'admet de solution physiquement acceptable que si

$$V_\mathrm{i}^4 - 2g(H-h)V_\mathrm{i}^2 - g^2D^2 \geq 0\,.$$

5 - Montrer que cette condition n'est vérifiée que si la vitesse initiale V_i est supérieure à une vitesse minimale V_min telle que

$$V_\mathrm{min} = \sqrt{g\left(H-h+\sqrt{(H-h)^2+D^2}\right)}\,.$$

6 - On suppose que le joueur tente un lancer franc ($D = 4{,}60\,\mathrm{m}$) en lançant le ballon à la vitesse $V_\mathrm{i} = 10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. A-t-il une chance de marquer le panier ? Déterminer littéralement puis numériquement la (les) valeurs d'angle θ_0 qu'il peut donner pour réussir.

Étienne Thibierge, 4 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Bases de la mécanique

Basket-ball

1 Nous avons montré en cours que

$$\begin{cases} x(t) = (V_\mathrm{i}\cos\theta_0)t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (V_\mathrm{i}\sin\theta_0)t + h \end{cases}$$

2 Le ballon atteint le panier à l'instant t_1 tel que

$$x(t_1) = D \qquad \text{soit} \qquad t_1 = \frac{D}{V_\mathrm{i}\cos\theta_0}\,.$$

D'après la loi horaire, il se trouve à cet instant à

$$z_1 = z(t_1) = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{V_\mathrm{i}^2\cos^2\theta_0} + \frac{(V_\mathrm{i}\sin\theta_0)D}{V_\mathrm{i}\cos\theta_0} + h \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z_1 = -\frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2\cos^2\theta_0} + D\tan\theta_0 + h}$$

3 Easy : le panier est atteint si $z_1 = H$, soit

$$-\frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2\cos^2\theta_0} + D\tan\theta_0 + h = H$$

ou encore en utilisant l'aide mathématique de l'énoncé

$$-\frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2}(1+\tan^2\theta_0) + D\tan\theta_0 + h - H = 0$$

et enfin sous forme du polynôme souhaité

$$\boxed{-\frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2}\tan^2\theta_0 + D\tan\theta_0 + \left(h - H - \frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2}\right) = 0\,.}$$

4 Une « solution physiquement acceptable » est une racine réelle positive. Il ne peut en exister que si le discriminant est positif, soit

$$D^2 + 4\times\frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2}\times\left(h - H - \frac{gD^2}{2V_\mathrm{i}^2}\right) \geq 0$$
$$4V_\mathrm{i}^4D^2 + 8gD^2(h-H)V_\mathrm{i}^2 - 4g^2D^4 \geq 0$$
$$\boxed{V_\mathrm{i}^4 - 2g(H-h)V_\mathrm{i}^2 - g^2D^2 \geq 0\,.}$$

> *Il faut bien sûr expliquer ce qu'est une solution acceptable. Par ailleurs, la lettre Δ n'a pas de signification universelle : la rédaction « on calcule le Δ » est donc à proscrire. Enfin, si vous multipliez l'équation pour la simplifier alors ce n'est plus le discriminant.*

5 On reconnaît à nouveau dans la condition précédente un trinôme du second degré donc la variable serait $X = V_\mathrm{i}^2$. Comme le terme de plus haut degré est positif, alors le trinôme est positif si X est supérieur à la plus grande des racines.

La discussion sur le signe est essentiel : comme on part d'une inégalité sur la vitesse initiale, il n'est pas possible de la transformer en égalité pour affirmer qu'il s'agit d'un minimum.

Le discriminant du trinôme vaut

$$4g^2(H-h)^2 + 4 \times 1 \times g^2D^2 = 4g^2\left[(H-h)^2 + D^2\right]$$

La plus grande des racines $X_+ = V_{\min}^2$ s'écrit donc

$$V_{\min}^2 = \frac{+2g(H-h) + \sqrt{4g^2\left[(H-h)^2 + D^2\right]}}{2} = g(H-h) + g\sqrt{(H-h)^2 + D^2}$$

ce qui permet finalement de conclure sur la vitesse minimale,

$$\boxed{V_{\min} = \sqrt{g\left(H - h + \sqrt{(H-h)^2 + D^2}\right)}\,.}$$

6 On trouve numériquement $V_{\min} = 7{,}23\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$: le joueur a donc toutes ses chances de marquer le lancer franc s'il vise bien.

Pour déterminer les valeurs d'angles possibles, il faut résoudre l'équation établie question 3. Commençons par la réécrire

$$-gD^2\tan^2\theta_0 + 2V_\mathrm{i}^2 D\tan\theta_0 + 2V_\mathrm{i}^2(h-H) - gD^2 = 0$$

qui a pour discriminant

$$4V_\mathrm{i}^4D^2 + 4 \times gD^2 \times \left[2V_\mathrm{i}^2(h-H) - gD^2\right] = 4D^2\left[V_\mathrm{i}^4 - 2g(H-h)V_\mathrm{i}^2 - g^2D^2\right]$$

Le discriminant est positif, donc les deux racines s'écrivent

$$\tan\theta_\pm = \frac{-2V_\mathrm{i}^2D \pm 2D\sqrt{V_\mathrm{i}^4 - 2g(H-h)V_\mathrm{i}^2 - g^2D^2}}{-2gD^2} = \frac{V_\mathrm{i}^2 \mp \sqrt{V_\mathrm{i}^4 - 2g(H-h)V_\mathrm{i}^2 - g^2D^2}}{gD}$$

En passant à l'arctangente avec Python (ou avec votre calculatrice), on trouve

$$\boxed{\theta_+ = 23{,}3° \qquad \text{et} \qquad \theta_- = 76{,}0°\,.}$$

```python
import numpy as np

# Constantes et parametres
g = 9.81
H = 3.05
h = 2.30
D = 4.6

# Calcul de la vitesse minimale
V_min = np.sqrt(g * (H - h + np.sqrt((H-h)**2 + D**2)))
print('V_min = ', "%e"%V_min)

# Calcul des angles lancer franc
Vi = 10

Delta = Vi**4 - 2*g*(H-h)*Vi**2 - g**2 * D**2
theta_1rad = np.arctan((Vi**2 - np.sqrt(Delta))/(g*D))
theta_2rad = np.arctan((Vi**2 + np.sqrt(Delta))/(g*D))

theta_1 = theta_1rad * 180/np.pi
theta_2 = theta_2rad * 180/np.pi

print('theta_1 = ', "%e"%theta_1)
print('theta_2 = ', "%e"%theta_2)
```