Transitoires du premier ordre

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

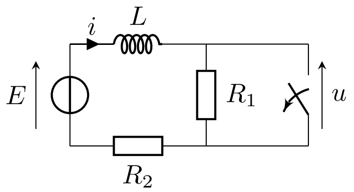
Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Vous traiterez au choix l'un des deux exercices.
Le second est plus difficile. Il est bien évidemment possible de faire les deux !

Étincelle de rupture

L'objectif de cet exercice est d'étudier la surtension qui apparaît aux bornes de l'interrupteur lors de l'ouverture d'un circuit inductif. Ce phénomène est par exemple utilisé pour amorcer l'éclairage des néons que vous avez l'habitude de voir tous les jours au plafond du lycée et ailleurs.



On l'illustre sur le circuit ci-contre comprenant une bobine supposée idéale et dans lequel l'interrupteur est brusquement ouvert à $t = 0$. On s'intéresse à la tension u aux bornes de l'interrupteur.

On considère $E = 10\,\mathrm{V}$, $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$, $R_1 = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$.

1 - Déterminer sans résoudre d'équation différentielle la valeur i_∞ de l'intensité qui traverse la bobine une fois le régime permanent atteint. En déduire la valeur u_∞ de u en régime permanent.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par u.

3 - Déterminer la valeur $u(0^+)$ de la tension aux bornes de l'interrupteur juste après l'ouverture. Donner son expression littérale et sa valeur numérique.

4 - En déduire que

$$u(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) E\,,$$

où le temps caractéristique τ est à définir.

Nous venons de montrer que u prend une valeur élevée juste après l'ouverture de l'interrupteur. À la limite, si on remplace R_1 par un circuit ouvert ($R_1 \to \infty$) la relation trouvée prévoit une tension infinie. Cela est rendu impossible en pratique par le phénomène de claquage de l'air, décrit dans le texte ci-dessous.

Document 1 : Claquage électrique

Le claquage d'un milieu isolant est le déclenchement d'un arc électrique au sein du milieu, c'est-à-dire le passage du courant au travers de l'isolant. Sous de fortes tensions, les électrons qui composent les atomes des molécules du matériau sont littéralement arrachés des atomes auxquels ils sont liés et participent à la conduction électrique. Dans l'air, le claquage se manifeste par exemple par le passage de la foudre au travers de l'atmosphère.

Le champ disruptif d'un milieu isolant représente la valeur maximum du champ électrique que le milieu peut supporter avant claquage. La valeur du champ disruptif dépend beaucoup des conditions d'humidité. Pour l'air, la valeur la plus communément admise est

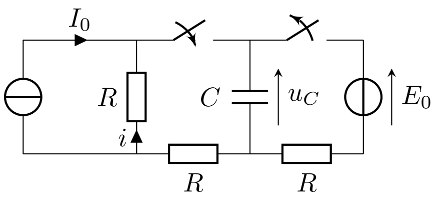
$$E_{\mathrm{dis}} \simeq 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{V \cdot m^{-1}} = 3{,}6 \cdot 10^4\,\mathrm{V \cdot cm^{-1}}\,.$$

De manière très simple, cette valeur indique que dans l'air sec il faut une différence de potentiel de 36 000 V pour faire apparaître une étincelle entre deux électrodes planes distantes de 1 cm.

5 - L'ouverture d'un interrupteur consiste à éloigner des plaques métalliques le constituant qui étaient initialement en contact. Une fois l'interrupteur ouvert, elles sont distantes d'environ 1 mm. Pour quelle valeur de u le champ disruptif est-il atteint ?

6 - Expliquer avec vos propres mots ce qu'il se passe si u dépasse cette valeur en faisant le lien avec la continuité du courant dans la bobine.

Circuit du premier ordre



Les trois résistances du circuit ci-contre sont identiques. Les deux interrupteurs du circuit sont synchronisés : à l'instant initial, celui de gauche se ferme et celui de droite s'ouvre. On cherche alors à déterminer l'intensité i traversant la résistance représentée à la verticale.

7 - Établir l'équation différentielle vérifiée par i et l'écrire sous forme canonique.

8 - Montrer que $u_C(0^+) = E_0$. En déduire que

$$i(0^+) = -\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}\,.$$

9 - Déterminer l'expression de $i(t)$ et la représenter graphiquement.

Transitoires du premier ordre

Étincelle de rupture

1 Le forçage est constant donc en régime permanent tous les grandeurs le sont aussi. La bobine est alors équivalente à un fil. Par ailleurs, c'est le même courant i_∞ qui traverse l'ensemble du circuit puisqu'il ne compte qu'une seule maille : l'interrupteur ouvert n'est parcouru par aucun courant. D'après la loi des nœuds et la loi d'Ohm,

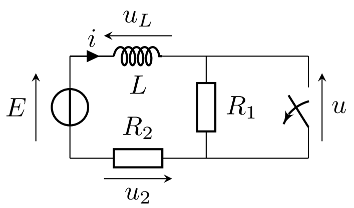
$$E = R_2 i_\infty + R_1 i_\infty + 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{i_\infty = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{A}}$$

> *Ce résultat se généralise : un circuit composé de N résistances R_n montées en série et alimentées par un unique générateur de f.é.m. E est parcouru par un courant*
>
> $$I = \frac{E}{\sum_{n=1}^{N} R_n}\,.$$
>
> *Ce résultat est connu sous le nom de loi de Pouillet.*

Comme u est également la tension aux bornes de R_1 montée en parallèle de l'interrupteur, on a d'après la loi d'Ohm,

$$u_\infty = R_1 i_\infty \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_\infty = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 9{,}8\,\mathrm{V}}$$

... c'est-à-dire ni plus ni moins qu'un pont diviseur de tension.



2 D'après la loi des mailles,

$$E = u_L + u + u_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u + R_2 i$$

Or $i = u/R_1$ d'où

$$E = \frac{L}{R_1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u + \frac{R_2}{R_1}u$$

soit encore

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{L}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)u = \frac{R_1 E}{L}$$

ce qui permet de conclure sur la forme canonique,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{R_1 E}{L} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}\,.}$$

3 u est une tension aux bornes d'un interrupteur monté en parallèle d'une résistance, elle n'a donc aucune raison d'être continue. La seule grandeur continue est le courant i traversant le circuit.

▷ À l'instant $t = 0^-$, le régime est permanent et l'interrupteur fermé. La résistance R_1 est court-circuitée et n'est parcourue par aucun courant (on peut le voir aussi en remarquant que la tension à ses bornes est nulle car en parallèle d'un fil). La bobine est équivalente à un fil. Ainsi, à $t = 0^-$,

$$E = 0 + 0 + R_2 i(0^-) \qquad \text{d'où} \qquad i(0^-) = \frac{E}{R_2}\,.$$

▷ À l'instant $t = 0^+$, on en déduit par continuité du courant traversant une bobine que

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R_2}\,.$$

Enfin, d'après la loi d'Ohm,

$$u(0^+) = R_1 i(0^+) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{u(0^+) = \frac{R_1}{R_2} E = 500\,\mathrm{V}\,.}$$

4 Résolvons l'équation différentielle obtenue question 2. Ses solutions sont de la forme

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + u_\infty$$

où la solution particulière $u_\infty = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} E$ a été déterminée question 1 (on peut bien sûr la retrouver à partir de l'équation différentielle).

Déterminons la constante d'intégration A à partir de la condition initiale,

$$u_C(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + u_\infty \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{R_1}{R_2} E \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{R_1}{R_2} E - \frac{R_1}{R_1+R_2} E = \frac{{R_1}^2}{R_2(R_1+R_2)} E$$

Finalement,

$$u(t) = \frac{{R_1}^2}{R_2(R_1+R_2)} E\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{R_1}{R_1+R_2} E \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) E\,.}$$

5 Pour deux électrodes métalliques séparées d'une distance $\ell = 1\,\mathrm{mm}$, la valeur critique u_{dis} est donnée par

$$E_{\text{dis}} = \frac{u_{\text{dis}}}{\ell} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{u_{\text{dis}} = E_{\text{dis}}\,\ell = 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{V}\,.}$$

6 Si u devient supérieure à sa valeur critique, alors un arc électrique apparaît dans l'air. Cela signifie que tout se passe comme si l'air devenait conducteur et empêchait le circuit de s'ouvrir pour garantir la continuité du courant traversant la bobine. Évidemment, cette image est simpliste, et la rendre plus rigoureuse nécessite d'avoir recours à l'électromagnétisme.

Circuit du premier ordre

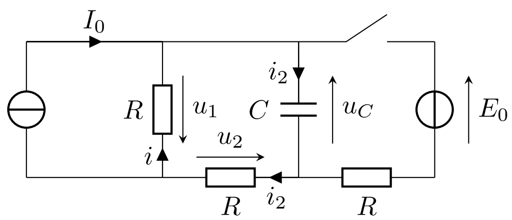


Figure 1 – Schéma du circuit à $t > 0$.

7 Raisonnons à partir de la figure 1. La branche contenant la source de tension est ouverte, c'est bien le même courant i_2 qui circule dans R et C.

Loi des mailles $$u_1 + u_2 + u_C = 0$$

Dérivation $$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

Loi de comportement $$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{i_2}{C} = 0$$

Loi des nœuds $$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i + I_0) + \frac{1}{C}(i + I_0) = 0$$

$$2R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = -\frac{I_0}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{2RC} = -\frac{I_0}{2RC}$$

On identifie alors $\tau = 2RC$ et on peut écrire sous forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = -\frac{I_0}{\tau}\,.}$$

$\boxed{8}$ Plaçons-nous à $t = 0^-$. Les interrupteurs n'ont pas encore basculé, donc le circuit est en régime permanent continu. On raisonne par circuit équivalent, comme sur la figure 2.

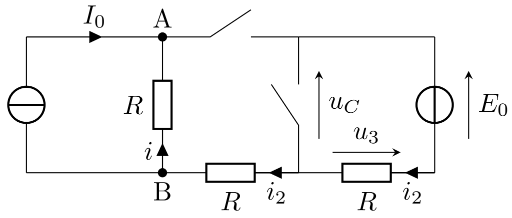


Figure 2 – Schéma du circuit à $t = 0^-$.

La loi des nœuds appliquée en A donne $i + I_0 = 0$, d'où on déduit de la loi des nœuds appliquée en B que $i_2 = i + I_0 = 0$. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$u_C(0^-) + \underbrace{u_3(0^-)}_{} = 0 = E_0 \qquad \text{d'où} \qquad u_C(0^-) = E_0\,.$$

Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_0\,.}$$

Raisonnons maintenant à l'instant $t = 0^+$ pour déterminer $i(0^+)$. Le schéma du circuit qu'il faut considérer redevient celui de la figure 1.

Loi des mailles	$u_1(0^+) + u_2(0^+) + u_C(0^+) = 0$
Loi d'Ohm	$Ri(0^+) + Ri_2(0^+) + E_0 = 0$
Loi des nœuds	$Ri(0^+) + Ri(0^+) + RI_0 + E_0 = 0$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{i(0^+) = -\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}\,.}$$

$\boxed{9}$ **Forme générale des solutions :**

▷ Solution particulière : second membre constant donc solution particulière i_P constante, d'où

$$0 + \frac{i_\mathrm{P}}{\tau} = -\frac{I_0}{\tau} \qquad \text{d'où} \qquad i_\mathrm{P} = -I_0\,.$$

▷ Solution homogène : $i_\mathrm{H}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

▷ Conclusion :

$$i(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - I_0\,.$$

Détermination de la constante : la condition initiale est celle déterminée à la question précédente.

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A - I_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} -\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}$$

Conclusion :

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{I_0}{2} - \frac{E_0}{2R}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - I_0\,.}$$