Oscillateurs harmoniques couplés

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Oscillateurs couplés

Cet exercice représente environ un tiers de l'épreuve de physique A session 2015 de la banque PT. Le sujet n'est (selon moi) pas toujours bien posé. Les notes de bas de page ne font pas partie de l'énoncé original, je les ai ajoutées pour faciliter votre compréhension.

On s'intéresse dans cette partie au système décrit figure 1 : deux masselottes se déplacent sans frottement sur un axe $(x'x)$. Ces deux masselottes seront supposés ponctuelles, de même masse m, positionnées respectivement aux points M_1 et M_2. Les points M_1 et M_2 sont repérés sur l'axe par leurs abscisses respectives $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Le point M_1 est accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_{R0} tandis que le point M_2 est accroché à M_1 par l'intermédiaire d'un ressort identique au précédent. Les données sont m, k et l_{R0}.

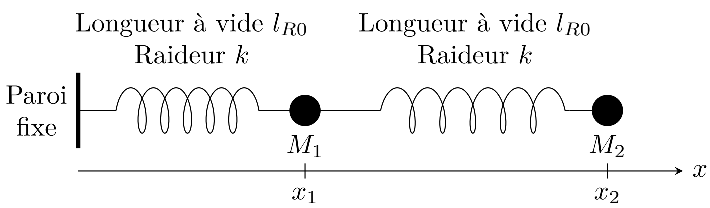

Figure 1 – **Système mécanique étudié.**

1 - Système au repos.
1.a **-** Déterminer les positions de repos x_{10} et x_{20} en fonction des données.
1.b **-** Les ressorts sont linéaires : leur tension est proportionnelle à leur allongement. Exprimer, en fonction de x_1, x_2 et des données le module [1] des tensions mécaniques T_1 et T_2.

2 - Mouvements de M_1 et M_2.
2.a **-** Étudier le mouvement de M_2 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_2(t)$ est de la forme

$$\ddot{x}_2 + Ax_2 = Bx_1 + C$$

Vous identifierez A, B, C à partir des données.
2.b **-** Étudier le mouvement de M_1 et montrer que l'équation différentielle vérifiée par $x_1(t)$ est de la forme

$$\ddot{x}_1 + Dx_1 = Ex_2 + F$$

Vous identifierez D, E, F à partir des données.
2.c **-** Montrer que en posant $\Delta X_1(t) = x_1(t) - x_{10}$ et $\Delta X_2(t) = x_2(t) - x_{20}$ on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \Delta X_2}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_0}^2 (\Delta X_2 - \Delta X_1) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 \Delta X_1}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_0}^2 (2\,\Delta X_1 - \Delta X_2) \end{cases}$$

1. Synonyme de norme.

Vous définirez ω_0 à partir des données.

3 - Loi générale du mouvement. On introduit [2] les deux pulsations propres

$$\Omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

On admet que la loi générale du mouvement de M_2 est de la forme

$$\begin{cases} \Delta X_1(t) = A_1\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \\ \Delta X_2(t) = A_1\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\Omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A_1, A_2, φ_1 et φ_2 dépendent des conditions initiales.

3.a **-** Les deux masses sont initialement au repos [3] : en déduire les valeurs de φ_1 et φ_2.

3.b **-** Le protocole expérimental permet de choisir les valeurs de $x_1(0)$ et $x_2(0)$. On considère d'abord $x_1(0) = 1{,}5\,l_{R0}$ et $x_2(0) = 2{,}5\,l_{R0}$.

▷ Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2.
▷ À quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?
▷ Que peut-on dire de $\Delta X_1(t)$ et $\Delta X_2(t)$?
▷ Donner l'expression littérale de $\Delta X_2(t)$.

3.c **-** On considère maintenant [4] $x_1(0) = 1{,}5\,l_{R0}$ et $x_2(0) = 1{,}5\,l_{R0}$.

▷ Déterminer les expressions littérales de A_1 et A_2.
▷ À quelle fréquence oscillent les deux ressorts ?
▷ Que peut-on dire de $\Delta X_1(t)$ et $\Delta X_2(t)$?
▷ Donner l'équation horaire littérale de $\Delta X_2(t)$.

Analyse des signaux par oscilloscope. Un montage électronique permet de mesurer $\Delta X_2(t)$ par l'intermédiaire d'une tension $u(t)$ qui est le produit de deux composantes « électrique » $B\cos(\omega t)$ et « mécanique » $\Delta X_2(t)$:

$$u(t) = B\cos(\omega t)\,\Delta X_2(t)\,.$$

La tension $u(t)$ est acquise par un oscilloscope numérique. Lorsque $\Delta X_2(t)$ correspond aux cas des questions 3.b et 3.c avec $\Omega_2 < \Omega_1 \ll \omega$, on obtient les enregistrements de la figure 2.

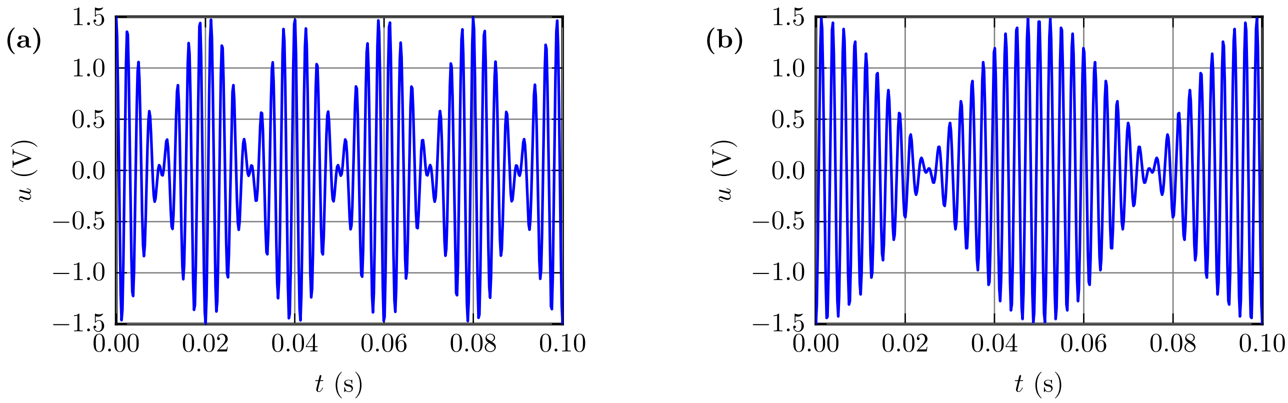

Figure 2 – Chronogrammes relevés à l'oscilloscope. (a) Pour $\Delta X_1 = 0{,}5\,l_{R0}\cos(\Omega_1 t)$; (b) Pour $\Delta X_2 = -0{,}5\,l_{R0}\cos(\Omega_2 t)$.

4 - Spectre de $u(t)$.

4.a **-** Justifier que la tension $u(t)$ peut s'interpréter comme une tension haute fréquence dont l'amplitude est modulée sinusoïdalement en basse fréquence.

4.b **-** Représenter graphiquement le spectre de Fourier [5] de $u(t)$ dans le cas $\Delta X_2(t) = 0{,}5\,l_{R0}\cos(\Omega_1 t)$.

4.c **-** Représenter ce même spectre si $\Delta X_2(t) = -0{,}5\,l_{R0}\cos(\Omega_2 t)$.

5 - Exploitation des chronogrammes.

5.a **-** Déterminer à partir de l'enregistrement (a), et en expliquant votre manière de procéder en cinq lignes maximum, la fréquence f_e de la partie « électrique » de $u(t)$ et la fréquence f_m de la partie « mécanique » de $u(t)$.

5.b **-** Faire de même pour l'enregistrement (b).

5.c **-** En déduire les pulsations Ω_1 et Ω_2 mesurées.

5.d **-** Les valeurs mesurées sont-elles cohérentes avec les expressions données de Ω_1 et Ω_2 ?

2. Ces pulsations étaient à calculer par les candidats dans le sujet original, mais nous n'en sommes pas encore capables.
3. Comprendre qu'elles sont sans vitesse initiale, mais pas forcément à leur position d'équilibre.
4. Oui, les conditions initiales sont physiquement bizarres … c'est comme ça.
5. Rappel du chapitre O1 : il faut commencer par écrire $u(t)$ comme une somme de cosinus.

Oscillateurs harmoniques couplés

Oscillateurs couplés [banque PT 2015]

❖ ***Barème :** 35 pts au total*

1.a Lorsque le système est au repos, la longueur des ressorts est égale à leur longueur à vide, donc

$$\boxed{x_{10} = l_{R0} \qquad \text{et} \qquad x_{20} = 2\, l_{R0}}$$

❖ ***Barème :** 1 pt*

1.b La longueur instantanée du premier ressort vaut $x_1(t)$ alors que la longueur instantanée du second ressort vaut $x_2(t) - x_1(t)$. Ainsi,

$$\boxed{T_1 = k\,|x_1 - l_{R0}| \qquad \text{et} \qquad T_2 = k\,|x_2 - x_1 - l_{R0}|}$$

> *L'énoncé n'utilise pas le vocabulaire usuel du programme ... il faut donc lire entre les lignes pour comprendre le sens de la question. Attention à ne pas oublier la valeur absolue : une norme est positive !*
>
> *Ne pas confondre la tension d'un ressort, c'est-à-dire la force de rappel exercée par ce ressort, avec la résultante des forces subies par les masselottes. En particulier, M_1 est soumise à **deux** forces et seule celle exercée par le ressort 1 est la force T_1.*

❖ ***Barème :** 2 pts*

2.a ▷ Système : point matériel M_2, de masse m ;

▷ Référentiel terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :
- → poids $\vec{P}$ exactement compensé par la réaction du support car le mouvement est (implicitement) horizontal ;
- → force de rappel exercée par le ressort 2

$$\vec{T}_{2\to 2} = -k\,(\ell_2 - l_{R0})\,\vec{u}_{\text{sortant}} = -k\,(x_2 - x_1 - l_{R0})\,\vec{u}_x\,.$$

▷ D'après le PFD :

$$m\,\vec{a}_{2/\mathcal{R}} = \vec{T}_{2\to 2}\,.$$

d'où en projection sur $\vec{u}_x$

$$m\,\ddot{x}_2 = -k\,x_2 + k\,x_1 + k\,l_{R0}\,,$$

et finalement

$$\boxed{\ddot{x}_2 + A\,x_2 = B\,x_1 + C \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} A = k/m \\ B = k/m \\ C = k\,l_{R0}/m \end{cases}}$$

❖ ***Barème :** 3 pts : 2 pts + 1 pt pour la rédaction.*

2.b La démarche est identique à la question précédente appliquée cette fois à M_1, à ceci près que M_1 est soumis aux forces exercées par les deux ressorts qui s'écrivent

$$\begin{aligned} \vec{T}_{1\to 1} &= -k(\ell_1 - l_{R0})\vec{u}_{\text{sortant},1} = -k(x_1 - l_{R0})\vec{u}_x \\ \vec{T}_{2\to 1} &= -k(\ell_2 - l_{R0})\vec{u}_{\text{sortant},2} = -k(x_2 - x_1 - l_{R0})(-\vec{u}_x) = +k(x_2 - x_1 - l_{R0})\vec{u}_x \end{aligned}$$

En projetant le PFD sur $\vec{u}_x$, on obtient

$$m\,\ddot{x}_1 = -k\,x_1 + k\,l_{R0} + k\,x_2 - k\,x_1 - k\,l_{R0}\,,$$

et finalement

$$\boxed{\ddot{x}_1 + D\,x_1 = E\,x_2 + F \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} D = 2k/m \\ E = k/m \\ F = 0 \end{cases}}$$

> *Ce type de question où deux ressorts interviennent n'est pas particulièrement difficile dans l'absolu, mais demande d'être parfaitement rigoureux et méthodique. En particulier, il ne faut pas se laisser emporter par son intuition : le ressort 1 a un effet sur le mouvement du point M_2, mais pour autant il n'exerce aucune force sur M_2 car il n'y est pas attaché. L'effet passe « par l'intermédiaire » du ressort 2. De même, attention à bien différencier $\overrightarrow{T}_{2\to 2}$ et $\overrightarrow{T}_{2\to 1}$, qui sont de même norme mais de sens opposé.*

❖ **Barème :** *3 pts : 2 pts + 1 pt pour la rédaction.*

2.c En inversant la définition,

$$x_1 = \Delta X_1 + x_{10} = \Delta X_1 + l_{R0} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \Delta X_2 + x_{20} = \Delta X_2 + 2l_{R0}$$

Comme les positions initiales sont constantes, alors

$$\ddot{x}_{1,2} = \frac{\mathrm{d}^2 \Delta X_{1,2}}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

En introduisant $DeltaX_{1,2}$ et en factorisant par k, l'équation obtenue question 2.a s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}^2\Delta X_2}{\mathrm{d}t^2} = -k\left[(\Delta X_2 + 2l_{R0}) - (\Delta X_1 + l_{R0}) + l_{R0}\right]$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\Delta X_2}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_0}^2(\Delta X_2 - \Delta X_1) \qquad \text{avec} \qquad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}\,.}$$

De même, l'équation obtenue question 2.b s'écrit

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\Delta X_1}{\mathrm{d}t^2} = -k\left[(\Delta X_1 + l_{R0}) - l_{R0} - (\Delta X_2 + 2l_{R0}) + (\Delta X_1 + l_{R0}) + l_{R0}\right]\,.$$

d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\Delta X_1}{\mathrm{d}t^2} = -{\omega_0}^2(2\,\Delta X_1 - \Delta X_2) \qquad \text{avec} \qquad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m}}$$

❖ **Barème :** *4 pts*

3.a À l'instant $t = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}\Delta X_1}{\mathrm{d}t}(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\Omega_1\,A_1\sin(\varphi_1) - \Omega_2\,A_2\sin(\varphi_2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\Delta X_2}{\mathrm{d}t} \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} -\Omega_1\,A_1\sin(\varphi_1) + \Omega_2\,A_2\sin(\varphi_2)\,.$$

Supposons A_1 et A_2 non nuls. Les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont non nulles nécessairement. En sommant ces deux équations,

$$-2\Omega_1 A_1 \sin\varphi_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \sin\varphi_1 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\varphi_1 = n\pi, n\in\mathbb{Z}\,.}$$

En prenant la différence,

$$-2\Omega_2 A_2 \sin\varphi_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \sin\varphi_2 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\varphi_2 = n'\pi, n'\in\mathbb{Z}\,.}$$

Pour simplifier, on suppose ensuite

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = 0\,,}$$

au prix éventuellement d'un signe sur les amplitudes A_1 et A_2.

> *L'énoncé est vraiment source de confusion, car le plus naturel est d'interpréter le repos en termes de position initiale plutôt qu'en termes de vitesse initiale, ce qui est d'ailleurs fait dans la question 1.a. Le rapport de jury indique que « rares ont été les étudiants qui ont dérivé les expressions de ΔX_1 et ΔX_2 » ...*
>
> *Les phases initiales φ_1 et φ_2 ne sont pas définies dans le cas où l'amplitude associée est nulle : il n'y a donc pas vraiment de problème avec le cas où une seule des deux amplitudes serait nulle.*

❖ **Barème :** *2 pts*

3.b Compte tenu des positions d'équilibre déterminées à la question 1.a, les conditions initiales $x_1(0)$ et $x_2(0)$ se traduisent en

$$\begin{cases} \Delta X_1(0) = x_1(0) - x_{10} = 1{,}5\,l_{R0} - l_{R0} = 0{,}5\,l_{R0} \\ \Delta X_2(0) = x_2(0) - x_{20} = 2{,}5\,l_{R0} - 2\,l_{R0} = 0{,}5\,l_{R0} \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant la forme de solution donnée par l'énoncé,

$$\begin{cases} \Delta X_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A_1 + A_2 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0{,}5\, l_{R0} \\ \Delta X_2(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A_1 - A_2 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0{,}5\, l_{R0} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\boxed{A_1 = 0{,}5\, l_{R0} \qquad \text{et} \qquad A_2 = 0\,.}$$

Les deux ressorts oscillent à la même fréquence

$$\boxed{f_1 = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\,.}$$

Comme $A_2 = 0$, alors $\boxed{\Delta X_1(t) = \Delta X_2(t)}$: les deux ressorts oscillent **en phase**. On exprime ΔX_2 en remplaçant A_1 et A_2,

$$\boxed{\Delta X_2(t) = 0{,}5\, l_{R0} \cos(\Omega_1 t)\,.}$$

❖ ***Barème :*** *4 pts : 2 pts pour les constantes + 1 pour la fréquence + 1 pour l'oscillation en phase et ΔX_2*

3.c De même, les conditions initiales se traduisent en

$$\begin{cases} \Delta X_1(0) = x_1(0) - x_{10} = 1{,}5\, l_{R0} - l_{R0} = 0{,}5\, l_{R0} \\ \Delta X_2(0) = x_2(0) - x_{20} = 1{,}5\, l_{R0} - 2\, l_{R0} = -0{,}5\, l_{R0} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \Delta X_1(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A_1 + A_2 \underbrace{=}_{\text{CI}} 0{,}5\, l_{R0} \\ \Delta X_2(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A_1 - A_2 \underbrace{=}_{\text{CI}} -0{,}5\, l_{R0} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\boxed{A_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad A_2 = 0{,}5\, l_{R0}}$$

> *Comme $x_1 = x_2$, le sujet suppose donc qu'à l'instant initial le ressort 2 est de longueur nulle ... passons sur la cohérence physique ...*

Les deux ressorts oscillent à la fréquence

$$\boxed{f_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,.}$$

Comme $A_1 = 0$, alors $\boxed{\Delta X_1(t) = -\Delta X_2(t)}$: les deux ressorts oscillent **en opposition de phase**. Il suffit de remplacer A_1 et A_2 par leur expression pour trouver

$$\boxed{\Delta X_2(t) = -0{,}5\, l_{R0} \cos(\Omega_2 t)\,.}$$

❖ ***Barème :*** *4 pts : 2 pts pour les constantes + 1 pour la fréquence + 1 pour l'oscillation en opposition de phase et ΔX_2*

4.a Comme la pulsation de ΔX_2 est très inférieure à celle ω de la composante électrique, on peut interpréter $B\,\Delta X_2(t)$ comme l'amplitude instantanée de u qui varie lentement comparativement à la période des oscillations rapides.

> *Question bizarre à nouveau : la notion de modulation d'amplitude n'est plus au programme de PTSI-PT. Charge au candidat de deviner ce que veut dire la question.*

❖ ***Barème :*** *1 pt*

4.b Dans ce cas,

$$u(t) = \frac{1}{2}\, B\, l_{R0} \cos(\Omega_1 t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\, B\, l_{R0} \times \frac{1}{2}\left(\cos\left[(\omega + \Omega_1)t\right] \cos\left[(\omega - \Omega_1)t\right]\right)\,.$$

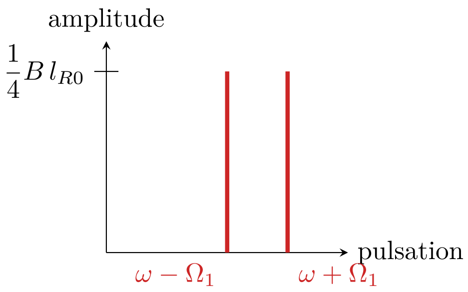

Figure 3 – Spectre de u dans le mode symétrique. Le ressort oscille à la pulsation Ω_1.

Le spectre est représenté figure 3.

❖ ***Barème :*** *2 pts*

4.c Désormais

$$u(t) = -\frac{1}{2} B\, l_{R0} \cos(\Omega_2 t) \cos(\omega t) = -\frac{1}{2} B\, l_{R0} \times \frac{1}{2} \left(\cos\left[(\omega + \Omega_2)t\right] \cos\left[(\omega - \Omega_2)t\right]\right) .$$

Le spectre est représenté figure 4.

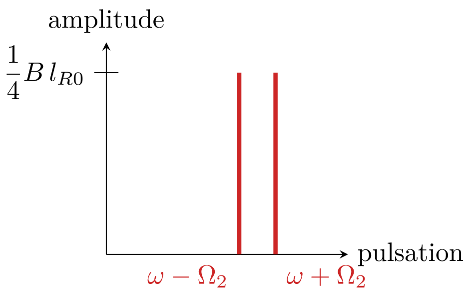

Figure 4 – Spectre de u dans le mode anti-symétrique. Le ressort oscille à la pulsation Ω_2.

> *Même s'il y a un signe $-$ dans l'expression de $u(t)$, il y a bien un $+$ sur le spectre d'amplitude. Les amplitudes sont en effet toujours positives, l'éventuel signe se répercute dans un déphasage de π.*

❖ ***Barème :*** *2 pts*

5.a La fréquence $f_e = \omega/2\pi$ est celle des oscillations rapides. On compte quarante périodes rapides pendant les 0,1 s que durent l'enregistrement, donc

$$\boxed{f_e = \frac{40}{0{,}1} = 400\,\mathrm{Hz}\,.}$$

La fréquence f_m est celle de l'enveloppe, mais comme il y a le changement de signe du cosinus alors la période mécanique correspond à deux lobes du signal. Graphiquement, $T_{m1} = 0{,}04\,\mathrm{s}$ d'où

$$\boxed{f_{m1} = \frac{1}{0{,}04} = 25\,\mathrm{Hz}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *3 pts : 1 pour f_e + 2 pour f_m*

5.b La fréquence électrique n'a pas varié $\boxed{f_e = 400\,\mathrm{Hz}}$, mais la période mécanique vaut maintenant 0,1 s d'où

$$\boxed{f_{m2} = 10\,\mathrm{Hz}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *1 pt*

5.c On déduit directement

$$\boxed{\Omega_1 = 2\pi f_{m1} = 157\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = 2\pi f_{m2} = 63\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *1 pt*

5.d D'après l'énoncé,

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{\omega_0\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}}{\omega_0\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}} \simeq 2{,}6$$

et d'après les valeurs trouvées

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = 2{,}5\,.$$

Les valeurs sont donc cohérentes.

> *Une autre possibilité serait de calculer les deux valeurs de ω_0 à partir des deux mesures et de vérifier qu'on trouve deux fois la même pulsation.*

❖ ***Barème :*** *2 pts*