Régime sinusoïdal forcé

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Capteur capacitif

Cet exercice est adapté de l'épreuve de physique A session 2015 de la banque PT.

Le sujet aborde l'étude d'un capteur capacitif de translation, dans lequel la pièce mobile et la pièce fixe de référence constituent les deux armatures d'un condensateur. Le déplacement x de la pièce mobile par rapport à la pièce de référence modifie la capacité $C(x)$ du condensateur ainsi formé. On s'intéresse dans cet exercice à la mesure de la capacité $C(x)$.

Un premier type de capteur envisageable est un capteur cylindrique, où une pièce mobile de longueur L coulisse à l'intérieur d'une pièce fixe de même longueur, voir figure 1. Des questions utilisant le programme de PT permettent en première partie de l'épreuve de montrer que la capacité du condensateur ainsi formé est nulle si $|x| > L$ et vaut

$$C(x) = \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) C_0$$

sinon, où la constante C_0 dépend notamment de la longueur L et du rayon des cylindres.

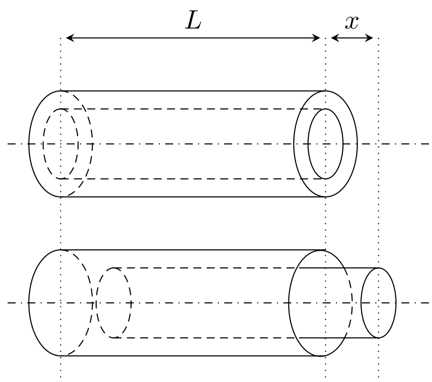

Figure 1 – **Capteur à condensateur cylindrique.** La position de référence des cylindres est représentée sur la figure du haut, leur position après déplacement de l'armature intérieure d'une quantité algébrique x sur la figure du bas.

1 - Tracer l'allure de $C(x)$.

Les variations de capacité $C(x)$ sous l'effet du déplacement de l'une des deux armatures doivent être converties en tension de manière à pouvoir être traitées par un organe de décision ou transmises à un circuit électronique. On envisage ici une solution utilisant le montage potentiométrique figure 2 alimenté par la tension $e(t) = E\cos(\omega t)$.

On s'intéressera en particulier à la sensibilité du capteur, définie par la relation

$$\sigma_Y = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\,,$$

où Y représente la grandeur de sortie exploitée (amplitude U ou phase φ de la tension $u(t)$), dont on souhaite idéalement qu'elle soit à la fois élevée et indépendante de x.

2 - La tension $u(t)$ s'exprimant sous la forme $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$, déterminer les expressions littérales de U et φ en fonction de E, $C(x)$, R et ω.

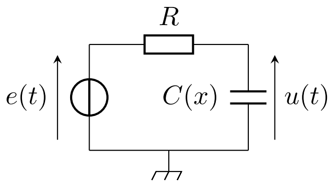

Figure 2 – Montage potentiométrique de conversion du déplacement x en tension $u(t)$. La tension d'alimentation possède une amplitude E et une pulsation ω.

Des calculs un peu techniques (mais posés à l'écrit) montrent que la sensibilité d'un tel capteur est en fait dépendant de x, ce qui n'est pas souhaitable. On est donc amené à compléter le capteur à géométrie cylindrique en symétrisant la structure selon le schéma figure 3. La partie mobile en translation, selon un déplacement algébrique x, correspond à l'armature cylindrique intérieure du condensateur cylindrique double, il en résulte deux capacités C_1 et C_2 dont les valeurs dépendent de x pour $-L/2 < x < L/2$,

$$C_1(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right) C_0 \qquad \text{et} \qquad C_2(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) C_0 \,.$$

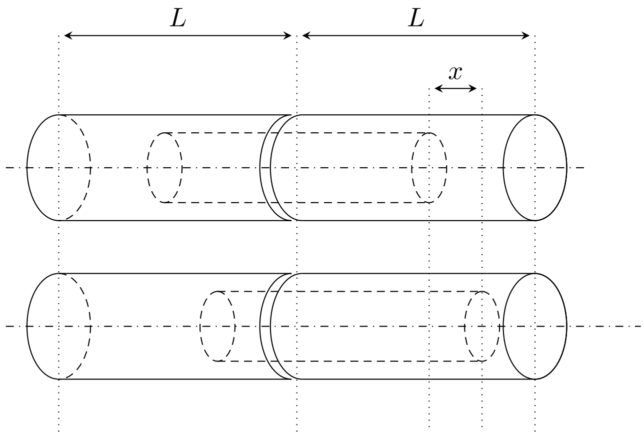

Figure 3 – Capteur à double condensateur cylindrique. Le condensateur double compte deux armatures externes et une armature interne. La position de référence des armatures cylindriques est représentée sur la figure du haut, leur position après déplacement de l'armature intérieure d'une quantité algébrique x sur la figure du bas.

3 - Représenter sur le même graphe les allures de $C_1(x)$ et $C_2(x)$. Quelle particularité peut-on constater ?

On insère ce condensateur double dans le montage en pont représenté figure 4.

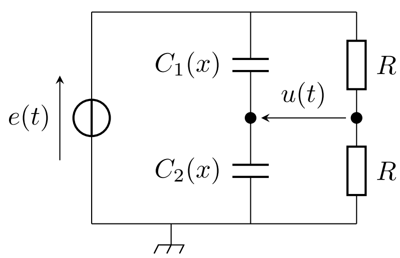

Figure 4 – Montage en pont de conversion du déplacement x en tension $u(t)$. La tension $u(t)$ est image du déplacement spatial x de l'armature interne du condensateur double de la figure 3. La tension d'alimentation possède une amplitude E et une pulsation ω.

4 - Déterminer l'expression littérale de l'amplitude complexe $\underline{U}$ associée à la tension $u(t)$ en fonction de E, $C_1(x)$ et $C_2(x)$. En déduire la relation liant l'amplitude U de $u(t)$ à E, L et x.

5 - Déterminer l'expression littérale de la sensibilté σ_U ainsi obtenue et commenter le résultat.

6 - Quelle information sur le déplacement le déphasage de $u(t)$ par rapport à $e(t)$ fournit-il ?

Exercice à rendre n° 10 – Correction | Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Régime sinusoïdal forcé

Capteur capacitif [écrit PT 2015]

1 Voir figure 5.

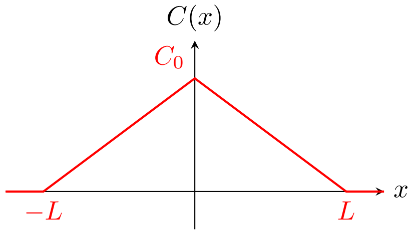

Figure 5 – Capacité $C(x)$ du capteur à condensateur cylindrique en fonction du déplacement x.

2 En termes d'impédances complexes, le condensateur C et la résistance R forment un pont diviseur de tension, donc

$$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

L'amplitude se détermine à partir du module,

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} E}$$

et la phase φ à partir de l'argument,

$$\varphi = -\arg(1 + \mathrm{j}RC\omega) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\varphi = -\arctan RC\omega\,.}$$

L'argument est donné par l'arctangente car la partie réelle est positive.

3 Voir figure 6.

Attention, les expressions données par l'énoncé ne sont valables que dans le domaine $-L/2 \leq x \leq L/2$ mais pas au delà. De toute façon, une capacité ne peut jamais être négative.

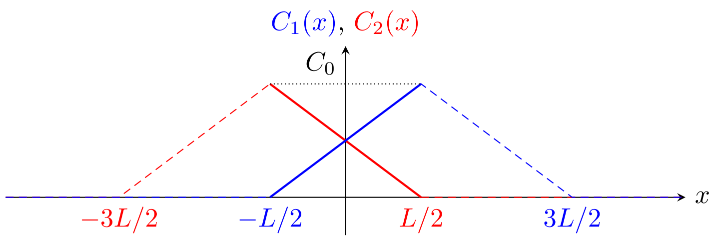

Figure 6 – Capacités $C_1(x)$ et $C_2(x)$ du capteur à double condensateur cylindrique en fonction du déplacement x. Les données de l'énoncé permettent de tracer les zones en trait épais continu. Les traits pointillés sont déduits par la généralisation immédiate de la figure 5. Version couleur sur le site de la classe.

On peut remarquer que lorsque $-L/2 < x < L/2$ alors $C_1(x) + C_2(x) = C_0$, ce qui ne dépend plus de x.

4 Notons A le nœud intermédiaire de la branche des condensateurs et B le nœud intermédiaire de la branche des résistances, comme sur le schéma figure 7. Les deux tensions v_A et v_B sont notées de la sorte car, compte tenu de la position de la masse, elles correspondent au potentiel électrique des nœuds A et B.

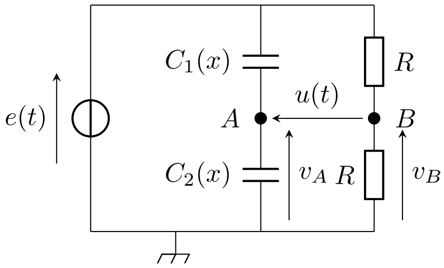

Figure 7 – Montage en pont de conversion du déplacement x en tension $u(t)$.

En supposant qu'aucun courant ne traverse l'appareil de mesure de u, les deux condensateurs sont montés en série et forment un pont diviseur de tension, donc

$$\frac{\underline{V_A}}{\underline{E}} = \frac{1/\mathrm{j}C_2\omega}{1/\mathrm{j}C_1\omega + 1/\mathrm{j}C_2\omega} = \frac{1}{1+C_2/C_1} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$$

De même, les deux réistances forment aussi un pont diviseur de tension, donc

$$\frac{\underline{V_B}}{\underline{E}} = \frac{R}{R+R} = \frac{1}{2}\,.$$

On peut alors en déduire la tension $\underline{U}$ par la loi des mailles,

$$\underline{V_A} - \underline{U} - \underline{V_B} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{U} = \underline{V_A} - \underline{V_B}$$

et ainsi

$$\underline{U} = \frac{C_1}{C_1+C_2}\underline{E} - \frac{\underline{E}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{U} = \frac{C_1(x)-C_2(x)}{2\,[C_1(x)+C_2(x)]}\underline{E}\,.}$$

En utilisant les expressions données pour $-L/2 < x < L/2$,

$$\begin{cases} C_1(x) - C_2(x) = \dfrac{2x}{L}C_0 \\ C_1(x) + C_2(x) = C_0 \end{cases}$$

on trouve

$$\underline{U} = \frac{x}{L}\underline{E}\,.$$

> *Une autre méthode utilisant deux lois des mailles dans les mailles « du haut » et « du bas » est possible, mais il faut alors justifier précisément que les tensions aux bornes des deux résistances sont égales, et pas seulement les nommer toutes les deux $\underline{U_R}$ pour les simplifier (ce qui s'appelle une arnaque).*

L'amplitude se détermine à partir du module,

$$\boxed{U = \frac{|x|}{L}\,E\,.}$$

> *Attention, U est positif par définition mais x peut être négatif également.*

$\boxed{5}$ Pour $x > 0$, $|x| = x$ et

$$\boxed{\sigma_U = \frac{E}{L}}$$

alors que pour $x < 0$, $|x| = -x$ et

$$\boxed{\sigma_U = -\frac{E}{L}\,.}$$

Dans les deux cas, tant que x est de signe fixé, **la sensibilité ne dépend pas de x**, ce qui est en général un avantage pour un capteur.

$\boxed{6}$ Comme le rapport $\underline{U}/\underline{E}$ est réel, le déphasage ne prend que les valeurs 0 si $x > 0$ ou π si $x < 0$: il renseigne donc **sur le signe de x**.