Analyse fréquentielle

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Millenium Bridge

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique commune aux filières MP-PC-PSI, concours commun Mines-Ponts, session 2016. Il représente une petite moitié de l'épreuve.

Remarques :

- La question 2 est **facultative**, mais il ne s'agirait que de révisions sur les transitoires ;
- **Une démonstration est attendue** à la question 4, mais faites en sorte de vous simplifier la vie avant de vous lancer dans le calcul de dérivée ;
- La question 8 fait appel à des notions au programme de PT : **vous admettrez** que seul le graphe 4 est exploitable pour vous.

Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaire pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.
L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.
Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\widehat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$.
A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

I. — Oscillateur simple

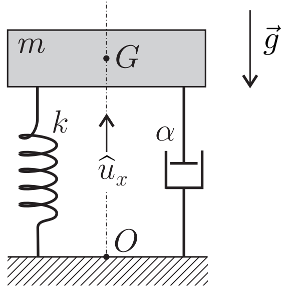

FIG. 1 – Oscillateur

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \widehat{u}_x)$ – voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\widehat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\,\widehat{u}_x$ avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

❏ **1** — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0 et ℓ_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.

❏ **2** — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0, ξ, X_0, V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\widehat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

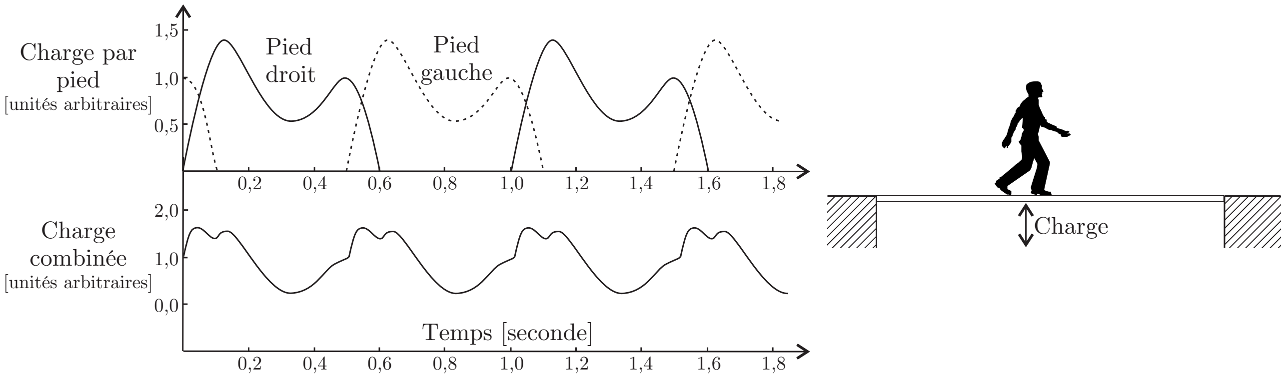

FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F(t)} = \vec{F_0} + \vec{F_1}\cos(2\pi f t)$.
Le vecteur $\vec{F_0}$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F_1} = 0{,}4\,\vec{F_0}$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\widehat{u}_x$.
On note $F_0 = \left\|\vec{F_0}\right\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

❏ **3** — Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m}\underline{F_1}$. On exprimera $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$ en fonction de ξ, ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

❏ **4** — Sous quelle condition portant sur ξ, un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $\left|\underline{H}\right|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

❏ **5** — En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

❏ **6** — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

❏ **7** — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

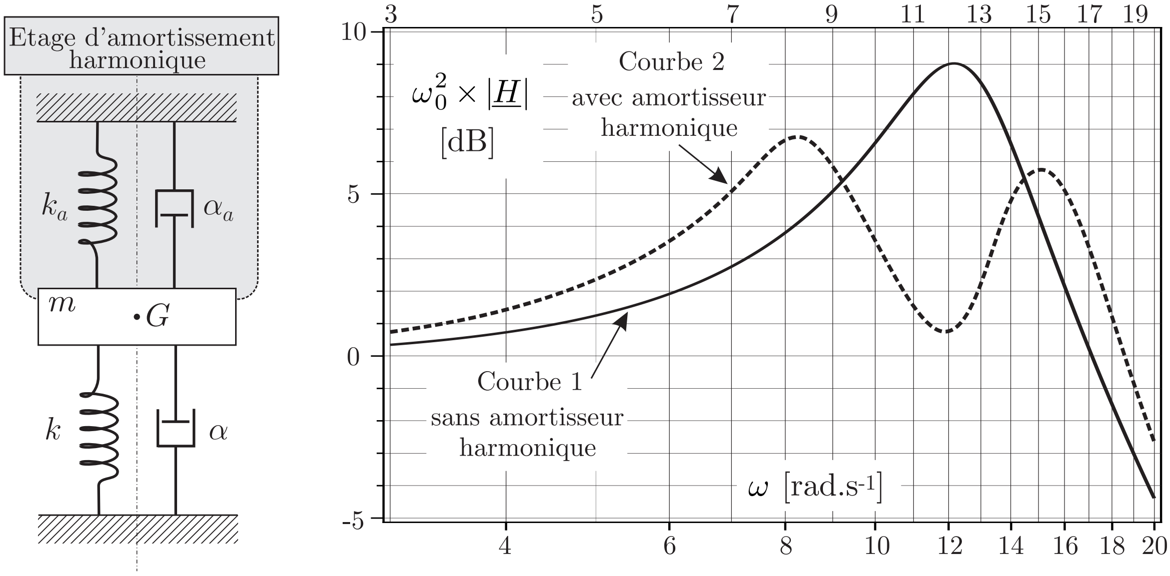

Figure 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

❏ **8** — Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Etait-ce qualitativement prévisible ?

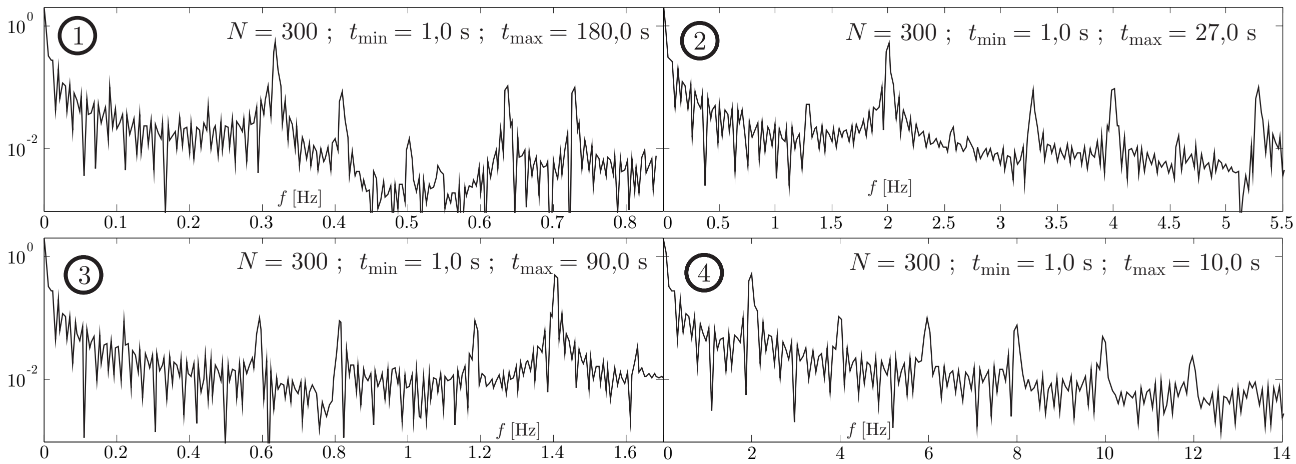

Figure 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

❏ **9** — À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

FIN DE LA PARTIE I

Exercice à rendre n° 11 – Correction Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Analyse fréquentielle

Millenium Bridge [écrit Mines MP-PC-PSI 2016]

1 ▹ Système : oscillateur.

▹ Référentiel $\mathcal{R}$: terrestre, considéré galiléen.

▹ Bilan des forces :
- → Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\widehat{u}_x$;
- → Force de rappel du ressort : $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(x-\ell_0)\widehat{u}_x$;
- → Force de frottement : $\vec{F}_\mathrm{f} = -\alpha\dot{x}\widehat{u}_x$.

▹ D'après le théorème de la résultante cinétique projeté sur $\widehat{u}_x$,

$$m\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_\mathrm{r} + \vec{F}_\mathrm{f}$$

$$m\ddot{x} = -mg - k(x-\ell_0) - \alpha\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -g + \frac{k\ell_0}{m}\,.$$

L'énoncé indique que l'équation doit être écrite en termes de $X = x - \widetilde{x}$, avec $\widetilde{x}$ une constante. On a alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$. En remplaçant x par $X + \widetilde{x}$, on arrive à

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = -\frac{k}{m}\widetilde{x} - g + \frac{k\ell_0}{m}\,.$$

En identifiant avec l'équation donnée par l'énoncé, on pose ${\omega_0}^2 = k/m$ la pulsation propre et $2\xi\omega_0 = \alpha/m$, soit $\xi = \alpha/2\sqrt{km}$ le facteur d'amortissement. Par ailleurs, le second membre est nul, d'où on déduit

$$\frac{k}{m}\widetilde{x} = -g + \frac{k\ell_0}{m} \qquad \text{soit} \qquad \widetilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}\,.$$

On obtient finalement la forme voulue

$$\boxed{\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + {\omega_0}^2 X = 0\,.}$$

2 L'équation est homogène : sa solution particulière est nulle.

Premier cas : $\boldsymbol{\xi = 0}$. L'équation est une équation d'oscillateur harmonique, de solutions

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,.$$

Condition initiale sur la position :

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} X_0 \qquad \text{soit} \qquad A = X_0\,.$$

Condition initiale sur la vitesse :

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \qquad \text{donc} \qquad \dot{x}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B\omega_0 \underbrace{=}_{\text{CI}} V_0 \qquad \text{soit} \qquad B = \frac{V_0}{\omega_0}\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{x(t) = X_0\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.}$$

Il s'agit d'oscillations harmoniques non amorties.

Second cas : $\boldsymbol{0 < \xi < 1}$. Le polynôme caractéristique de cette équation s'écrit

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + {\omega_0}^2 = 0$$

et il a pour discriminant
$$\Delta = 4\xi^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2\left(\xi^2 - 1\right) < 0\,.$$
Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent
$$r_\pm = \frac{-2\xi\omega_0 \pm \mathrm{i}\sqrt{4{\omega_0}^2\,(1-\xi^2)}}{2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$
Posons $\omega_\mathrm{p} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ la pseudo-pulsation. Les solutions de l'équation prennent la forme
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_\mathrm{p}t) + B\sin(\omega_\mathrm{p}t)\right]\,.$$
Condition initiale sur la position :
$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} 1\times A \underbrace{=}_{\text{CI}} X_0 \qquad \text{soit} \qquad A = X_0\,.$$
Condition initiale sur la vitesse :
$$\dot x = -\xi\omega_0\,\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_\mathrm{p}t) + B\sin(\omega_\mathrm{p}t)\right] + \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\left[-A\omega_\mathrm{p}\sin(\omega_\mathrm{p}t) + B\omega_\mathrm{p}\sin(\omega_\mathrm{p}t)\right]$$
$$\text{d'où} \qquad \dot x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\xi\omega_0\times A + 1\times\omega_\mathrm{p}B \underbrace{=}_{\text{CI}} V_0 \qquad \text{soit} \qquad B = \frac{V_0+\xi\omega_0X_0}{\omega_\mathrm{p}}$$
Conclusion :
$$\boxed{x(t) = \left[X_0\cos(\omega_\mathrm{p}t) + \frac{V_0+\xi\omega_0X_0}{\omega_\mathrm{p}}\sin(\omega_\mathrm{p}t)\right]\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,.}$$
Il s'agit d'oscillations amorties.

Dans le cas où le vent exerce sur le système une force supplémentaire $\overrightarrow{F}_\mathrm{v} = \beta\dot x\widehat{u}_x$, l'équation différentielle est inchangée à ceci près que ξ doit être remplacé par
$$\xi' = \frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{km}}\,.$$
Cela ne change pas le signe du discriminant du polynôme caractéristique, donc pas la forme des solutions, mais ξ' n'est pas forcément positif. L'exponentielle apparaissant dans les solutions n'est donc pas forcément décroissante. Ainsi, au lieu de s'amortir, **le vent peut avoir pour effet d'amplifier les oscillations du système**.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Repartons de l'équation différentielle obtenue question 1 avec l'ajout du forçage piéton $\overrightarrow{F}$,
$$\ddot x + 2\xi\omega_0\dot x + {\omega_0}^2x = -g + {\omega_0}^2\ell_0 - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi ft)\,.$$
Par le même raisonnement que précédemment, on pose
$$Y = x - \widetilde{x} + \frac{F_0}{m{\omega_0}^2}$$
et on a alors égalité des dérivées de Y et de x. L'équation devient donc
$$\boxed{\ddot Y + 2\xi\omega_0\dot Y + {\omega_0}^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi ft)\,.}$$

En utilisant les amplitudes complexes,
$$\begin{aligned} -\omega^2\underline{Y} + 2\mathrm{i}\xi\omega_0\omega\underline{Y} + {\omega_0}^2\underline{Y} &= -\underline{E} \\ \left({\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}\xi\omega_0\omega\right)\underline{Y} &= -\underline{E} \\ {\omega_0}^2\left(1-\Omega^2+2\mathrm{i}\xi\Omega\right)\underline{Y} &= -\underline{E} \end{aligned}$$
en posant $\Omega = \omega/\omega_0$ soit $\omega = \Omega\omega_0$. On en déduit la fonction de transfert,
$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{Y}}{\underline{E}} = -\frac{1}{{\omega_0}^2}\,\frac{1}{1-\Omega^2+2\mathrm{i}\xi\Omega}}$$

4 Il y a résonance s'il existe une pulsation ω_r où $|\underline{H}|$ est maximal, c'est-à-dire où le module du dénominateur est minimal. Posons

$$f(\Omega) = \left|1 - \Omega^2 + 2\mathrm{i}\xi\Omega\right|^2 = (1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\,,$$

et ainsi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Omega} = -2 \times (1-\Omega^2) \times 2\Omega + 8\xi^2\Omega = 4\Omega\left(-1 + \Omega^2 + 2\xi^2\right)\,.$$

Hormis en $\Omega = 0$, cette dérivée ne peut s'annuler que si $2\xi^2 - 1 < 0$ soit $\xi < 1/\sqrt{2}$, et dans ce cas l'annulation se fait en

$$\Omega_\mathrm{r}{}^2 = 1 - 2\xi^2 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_\mathrm{r} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}\,.}$$

> *Pour une rédaction rigoureuse, il faut justifier l'existence de Ω_r avant de donner son expression avec la racine carrée.*
>
> *Une astuce possible pour simplifier un peu plus le calcul de la dérivée est d'introduire une nouvelle variable $u = \Omega^2$.*

Comme $\xi^2 \ll 1$, alors $\omega_\mathrm{r} \simeq \omega_0$, et

$$\underline{H}(\omega_\mathrm{r}) = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{1-1+2\mathrm{i}\xi} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\xi\omega_0^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})| = \frac{1}{2\xi\omega_0{}^2}\,.}$$

5 On constate que le maximum de la courbe 1 se trouve à $\omega_\mathrm{r} = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Comme $\omega_\mathrm{r} \simeq \omega_0$, alors

$$\boxed{\omega_0 = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.}$$

Le maximum de la courbe donne un gain de 9 dB, soit

$$\omega_0{}^2\,|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})| = 10^{9/20} = 2{,}8\,.$$

D'après la question précédente, on déduit

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2\omega_0{}^2\,|\underline{H}(\omega_\mathrm{r})|} = 0{,}18\,.}$$

6 À la résonance en élongation, la réponse du système peut devenir très supérieure à l'amplitude du forçage, ce qui peut causer des dommages à la structure.

7 On peut par exemple envisager d'utiliser un **accéléromètre**. Dans ce cas, il faut le placer au niveau de la hanche du piéton pour s'affranchir de la rotation de la jambe. Des jauges de déformation peuvent également être utilisées, mais il faut alors faire marcher le piéton sur un tapis roulant pour éviter le déplacement.

8 On observe sur le graphe ④ un premier pic à 2 Hz, qui décrit le fondamental de la marche, en accord avec la figure 2 où le signal a une période de l'ordre de 0,5 s. Les pics suivants à 4, 6, 8, 10 et 12 Hz correspondent aux harmoniques. Cela semble qualitativement cohérent : la période de la marche est de l'ordre de 1 s, ce qui donne bien 0,5 s pour la force compte tenu des deux jambes.

> ***Complément de réponse utilisant le programme de PT :*** *La fréquence d'échantillonnage de chacun des spectres est donnée par*
>
> $$f_e = \frac{N}{t_{max} - t_{min}}\,,$$
>
> *ce qui donne respectivement 1,68 Hz, 11,5 Hz, 3,37 Hz et 33,3 Hz. Or on constate sur la figure 1 que le signal issu du capteur de force a une période de l'ordre de 0,5 s, soit une fréquence de l'ordre de 2 Hz, et compte certainement plusieurs harmoniques. On en déduit que* ***le critère de Shannon $f_{max} \leq f_e/2$ n'est clairement pas respecté pour les graphes ① et ③*** *, qui ne rendent même pas correctement le fondamental, et qu'il ne l'est* ***probablement pas non plus pour le graphe ②*** *, qui ne peut rendre correctement que les deux premières harmoniques. On observe le repliement du spectre sur ces trois graphes. Seul le graphe ④ donne un spectre exploitable.*

9 La figure 3 montre que la résonance en élongation du Millenium Bridge se trouve à une fréquence qui coïncide avec la fréquence de la marche : $2\,\mathrm{Hz} = 12\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ ... l'architecte n'a pas été bien malin ! Toujours d'après la figure 3, l'ajout d'un amortisseur harmonique a permis de dédoubler le pic de résonance en deux pics secondaires de telle sorte que **la réponse du système fasse désormais apparaître un minimum** à la pulsation correspondant à la pulsation de la marche.