Mécanique en coordonnées polaires

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

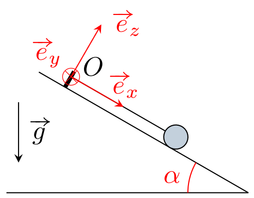
Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

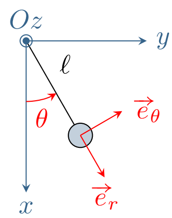
Pendule posé sur un plan incliné

Considérons un pendule simple de masse $m = 5\,\mathrm{g}$ posé sur un plan incliné formant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Le pendule est modélisé par un point matériel M relié au point O par un fil de longueur $\ell = 30\,\mathrm{cm}$, supposé inextensible et sans masse. Tous les frottements sont négligés. À l'instant initial, le pendule est lancé, fil tendu, depuis un angle θ_0 avec une vitesse $\vec{v}_0 = \ell\dot{\theta}_0\vec{e}_\theta$ orthoradiale.

On adopte le repérage cylindrique indiqué sur la figure 1. La direction x correspond à la plus grande pente du plan incliné.



(a) Vue de côté



(b) Vue perpendiculaire à (Oz)

Figure 1 – **Pendule simple posé sur un plan incliné.** Version couleur sur le site de la classe.

1 - Montrer que le poids du pendule s'écrit

$$\vec{P} = mg\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_\theta - mg\cos\alpha\,\vec{e}_z$$

2 - Établir les équations du mouvement par application du principe fondamental de la dynamique.

Cette équation étant non linéaire en θ, elle ne peut être résolue simplement analytiquement et on adopte donc une méthode numérique reposant sur le schéma d'Euler. On cherche $\theta(t)$ sur un intervalle de temps $[0, T_{\max}]$ donné et avec un pas de temps h donné également.

3 - Écrire (sur la copie) une fonction Python `euler` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et renvoie trois listes de nombres correspondant au temps t discrétisé, à l'angle θ pour ces instants, et à sa dérivée $\dot{\theta}$. Vous justifierez le choix des paramètres transmis à la fonction. Certaines variables peuvent être supposées globales à condition de le préciser.

Pour des conditions initiales données, on exécute ensuite `liste_t, liste_theta, liste_thetaP = euler(...)` (les paramètres de `euler` ne sont volontairement pas indiqués ici).

4 - En utilisant les résultats renvoyés par le script précédent, écrire un script Python permettant de déterminer la norme de la tension du fil T au cours du mouvement du pendule.

Le programme permet de tracer les courbes de la figure 2, correspondant à trois simulations pour trois jeux de conditions initiales différentes.

5 - Laquelle des conditions initiales est modifiée entre les différentes simulations ? Que vaut l'autre ? Faire le schéma correspondant à l'instant initial, en représentant θ_0 et la vitesse initiale.

6 - Déterminer le lien entre la période des oscillations correspondant à l'angle θ et celle de la norme T de la tension

Étienne Thibierge, 8 mars 2018, www.etienne-thibierge.fr

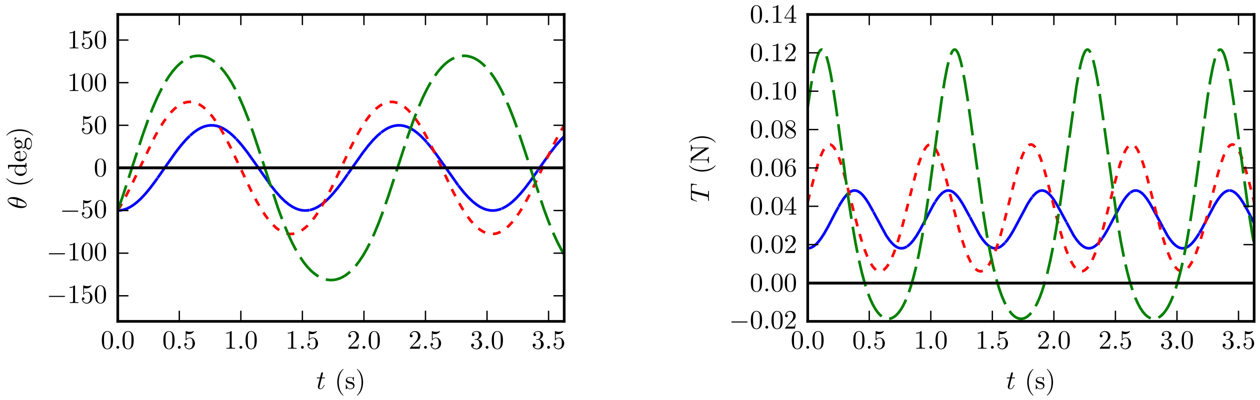


Figure 2 – **Résultats de la simulation numérique du pendule sur un plan incliné.** Courbe de gauche : angle $\theta(t)$. Courbe de droite : norme $T(t)$ de la force de tension du fil. Version couleur sur le site de la classe.

du fil. Interpréter.

7 - Justifier que sur l'une des simulations le fil ne reste pas tendu tout au long du mouvement. À quel instant t_0 se détend-il ? Peut-on interpréter la suite de la simulation pour $t > t_0$?

8 - Supposons que l'angle θ reste faible tout au long du mouvement. Simplifier et résoudre l'équation du mouvement. Comparer le résultat au cas du pendule simple vertical, et commenter.

Exercice à rendre n° 14 – Correction Langevin-Wallon, PTSI 2017-2018

Mécanique en coordonnées polaires

Pendule posé sur un plan incliné

1 Commençons par projeter le poids dans la base cartésienne inclinée,

$$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_z\,,$$

et comme $\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta$ alors

$$\boxed{\vec{P} = mg\sin\alpha\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\alpha\sin\theta\,\vec{e}_\theta - mg\cos\alpha\,\vec{e}_z\,.}$$

2 On étudie le pendule par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen. Il est soumis à son poids, la réaction $\vec{R} = +R\vec{e}_z$ du support (normale car sans frottement) et la force $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ du fil. Après projection du PFD,

$$\boxed{\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\alpha\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\alpha\sin\theta \\ 0 = -mg\cos\alpha + R \end{cases}}$$

3 Les seuls paramètres à même de changer au cours de l'étude sont les conditions initiales, ce sont donc les seules variables de la fonction `euler`. Toutes les autres sont globales. La fonction `pendule` utilise l'expression de $\ddot{\theta}$ donnée par la projection orthoradiale du PFD.

```python
### Variables globales
m = 5e-3
L = 30e-2
alpha = 35 * np.pi/180
g = 9.81

def pendule(theta, thetaP):
    ### Calcul des dérivées
    thetaPP = -g*np.sin(alpha)*np.sin(theta)/L
    return thetaP, thetaPP

def euler(theta0, thetaP0):
    ### Initialisation :
    t = 0
    theta = theta0
    thetaP = thetaP0
    liste_t = [t]
    liste_theta = [theta]
    liste_thetaP = [thetaP]
    while t+h <= Tmax:
        ### Application de la méthode d'Euler
        t += h
        thetaP, thetaPP = pendule(theta, thetaP)
        theta += h * thetaP
        thetaP += h * thetaPP
        liste_t.append(t)
        liste_theta.append(theta)
        liste_thetaP.append(thetaP)
    return liste_t, liste_theta, liste_thetaP
```

4 On utilise l'expression de T connaissant θ et $\dot{\theta}$ donnée par la projection radiale du PFD.

```python
### Première méthode : double remplissage en compréhension (marche, mais pas vu en info)
Tension = [m*g*np.sin(alpha)*np.cos(Theta) + m*L*ThetaPoint**2 for Theta in liste_theta for ThetaPoint in liste_thetaP]

### Deuxième méthode : remplissage terme à terme via une boucle explicite
Tension = []
for i in range(len(liste_t)):
    Theta = liste_theta[i]
    ThetaPoint = liste_thetaP[i]
    Tension.append(m*g*np.sin(alpha)*np.cos(Theta) + m*L*ThetaPoint**2)
```

$\boxed{5}$ On constate que les trois courbes **partent de la même valeur initiale $\theta_0 = -50°$**, mais avec une pente initiale différente. C'est donc **la valeur de la dérivée $\dot\theta_0$ qui est modifiée** entre les trois simulations, mais elle est toujours positive, donc dirigée selon $+\vec{e}_\theta$. On en déduit la figure 3.

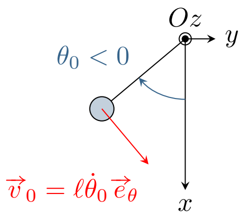


Figure 3 – Schéma du pendule à l'instant initial en vue de dessus.

$\boxed{6}$ On constate sur les figures que **la période de θ est égale au double de celle de N** : 1,5 s contre 0,75 pour la courbe en trait plein bleue, 1,6 s contre 0,8 pour la courbe en petits pointillés rouges, et 2,2 s contre 1,1 s pour la courbe en longs pointillés verts. Cela s'interprète par le fait que la force de tension du fil est identique pour les angles opposés $+\theta$ et $-\theta$, en raison des symétries du dispositif et de la direction du poids.

$\boxed{7}$ On constate pour la courbe en longs pointillés verts que la norme de la tension du fil prendrait des valeurs négatives, ce qui n'a aucun sens. Il y a en fait rupture de la liaison au premier instant où la tension T s'annule, soit en $t_0 = 0{,}5$ s. Comme il n'y a plus de liaison, la nature du mouvement change (de mouvement pendulaire il devient chute libre) : **la suite de la simulation n'a physiquement plus de sens**, même si la tension redevient positive, car on ne peut pas connaître le mouvement entre temps.

$\boxed{8}$ Dans la limite des petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$ et on peut linéariser l'équation différentielle,

$$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\alpha\,\theta \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot\theta + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\theta = 0\,.}$$

Cette équation est identique à celle du pendule simple vertical, si ce n'est que la gravité g est remplacée par une « gravité modifiée » $g\sin\alpha$ due au plan incliné. On pose la pulsation $\omega_0 = \sqrt{g\sin\alpha/\ell}$.

Les solutions de cette équation d'oscillateur harmonique sont de la forme

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\,,$$

avec A et B deux constantes. À l'instant initial,

$$\theta(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \theta_0 \underbrace{=}_{\text{sol}} A \qquad \text{et} \qquad \dot\theta(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \frac{v_0}{\ell} \underbrace{=}_{\text{sol}} -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1$$

Finalement,

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\ell\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.}$$