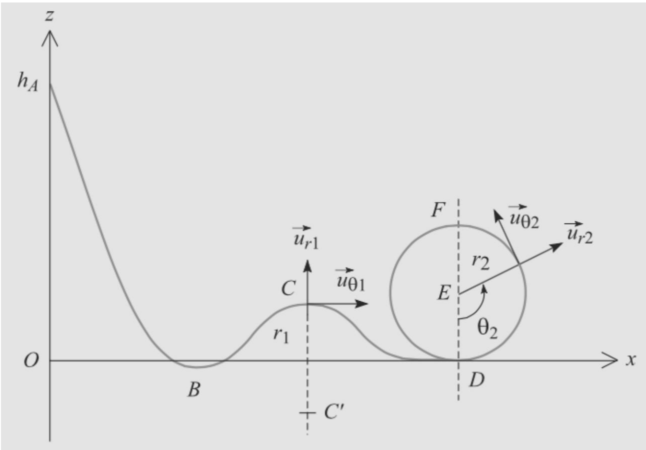
Énergie mécanique

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Montagnes russes



Cet exercice cherche à décrire des montagnes russes dont le profil est représenté ci-contre. Le chariot dans lequel les visiteurs prennent place est assimilé à un point matériel M de masse m et il parcourt sa trajectoire sans aucun frottement ni fluide, ni solide. À l'instant initial, le chariot part de la position A avec une vitesse nulle.

A - Première bosse

On s'intéresse dans un premier temps au risque de décollage du chariot sur la première bosse. La situation est la plus risquée au point C d'altitude h_C. Au voisinage de ce point, la trajectoire est assimilable à un arc de cercle de centre C' et de rayon constant noté r_1. Le mouvement est décrit dans la base polaire $\vec{u}_{r1}$, $\vec{u}_{\theta 1}$ de centre C'.

1 - Faire un schéma de la trajectoire au voisinage de C en y traçant les forces appliquées à M lorsqu'il est en C.

2 - Établir l'expression de l'accélération $\vec{a}_C$ du point M lorsqu'il est en C et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\vec{a}_C = -\frac{v_C^2}{r_1}\vec{u}_{r1} + a_{\theta 1,C}\,\vec{u}_{\theta 1}$$

où v_C est la norme de la vitesse de M en C et la composante $a_{\theta 1}$ à préciser.

3 - Montrer que la force de réaction du support en C vaut

$$\vec{R}_C = \left(mg - \frac{mv_C^2}{r_1}\right)\vec{u}_{r1}\,.$$

4 - Montrer par étude de l'énergie mécanique que $v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)}$.

5 - En déduire les valeurs minimales et maximales admissibles pour h_A pour que le chariot franchisse le point C sans décoller.

B - Looping

On se focalise désormais sur le looping, de centre E et de rayon r_2, où l'on repère la position du chariot M par l'angle θ_2. Le mouvement est décrit dans la base polaire $\vec{u}_{r2}$, $\vec{u}_{\theta 2}$ de centre E.

6 - Montrer par une méthode énergétique que tout au long du looping

$$v^2 = 2g\left[h_A - r_2\left(1 - \cos\theta_2\right)\right]\,.$$

7 - En déduire que la force de réaction du rail s'écrit

$$\vec{R} = -\frac{mg}{r_2}\left(2h_A - 2r_2 + 3r_2\cos\theta_2\right)\vec{u}_{r2}\,.$$

Étienne Thibierge, 16 mars 2018, www.etienne-thibierge.fr

8 - À quelle condition sur h_A le chariot peut-il faire un tour complet dans le looping ?

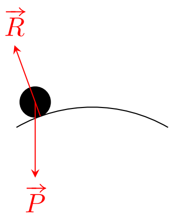
9 - En déduire une condition sur le rayon r_2 pour que le chariot puisse à la fois franchir le point C sans décoller et faire un tour complet dans le looping.

Énergie mécanique

Montagnes russes

A - Première bosse

1



- ▷ Système : chariot, assimilé à un point matériel M de masse m ;
- ▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des forces :
  - → poids $\vec{P}$, vertical et vers le bas ;
  - → réaction $\vec{R}$ du rail, perpendiculaire à la piste car les frottements sont négligés.

L'énoncé indique que la trajectoire au voisinage de C est un cercle, ce qui conduit au schéma ci-contre

2 Le vecteur vitesse est a priori défini à partir de l'origine O du repère, mais

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC'}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C'M}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{C'M}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{C'M} = r_1\,\vec{u}_{r1}\,,$$

car C' est un point fixe dans le référentiel d'étude. En généralisant les expressions des coordonnées polaires,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_{r1}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}_1\,\vec{u}_{\theta 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_{\theta 1}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}_1\,\vec{u}_{r1}\,.$$

Comme on suppose la trajectoire circulaire, alors $r_1 = \text{cte}$ et

$$\vec{v}_C = r_1\dot{\theta}_1\,\vec{u}_{\theta 1}$$

et son vecteur accélération

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = r_1\ddot{\theta}_1\,\vec{u}_{\theta 1} - r_1\dot{\theta}_1^{\,2}\,\vec{u}_{r1}$$

et comme on s'intéresse seulement au point C alors $r_1^{\,2}\dot{\theta}_{1,C}^{\,2} = v_C^2$, d'où

$$\boxed{\vec{a}_C = -\frac{v_C^2}{r_1}\,\vec{u}_{r1} + r_1\ddot{\theta}_{1,C}\,\vec{u}_{\theta 1}}$$

> *Attention, le mouvement n'est pas uniforme, il n'est donc pas possible d'appliquer directement le résultat que vous connaissez : la démonstration doit être refaite et adaptée.*
>
> *Le résultat peut également s'écrire sous forme $a_{\theta 1,C} = \dot{v}_C$.*

3 D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$m\,\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R}\,,$$

ce qui donne au niveau du point C (et seulement en ce point !)

$$m\,\vec{a}_C = -mg\,\vec{u}_{r1} + R_C\,\vec{u}_{r1}$$

où $R_C = ||\vec{R}_C||$ car la réaction est normale au support en raison de l'absence de frottements. Par projection sur $\vec{u}_{r1}$ et en utilisant la question précédente, on en déduit

$$-m\frac{v_C^2}{r_1} = -mg + R_C \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{R}_C = \left(mg - \frac{mv_C^2}{r_1}\right)\vec{u}_{r1}}$$

> *Une projection non demandée sur $\overrightarrow{u}_{\theta 1}$ montrerait que $\ddot{\theta}_{1,C} = 0$ ... mais attention : c'est une conséquence du fait que la réaction soit dirigée selon $\overrightarrow{u}_{r1}$, ce qui est une conséquence de l'absence de frottements, et vous ne pouvez surtout pas postuler $\ddot{\theta}_{1,C} = 0$ pour une pseudo-déduction de la direction de $\overrightarrow{R}_C$.*

4 Le chariot n'est soumis qu'à son poids, qui est conservatif, et à la force de réaction normale du support, qui ne travaille pas. Son énergie mécanique E_m est donc une constante, et en particulier

$$E_\mathrm{m}(A) = E_\mathrm{m}(C) \qquad \text{soit} \qquad 0 + mgh_A = \frac{1}{2}\, m\, v_C^2 + mgh_C \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_C = \sqrt{2g(h_A - h_C)}}$$

> *L'énoncé choisit l'origine des énergies mécaniques en O, il n'est donc pas possible de la redéfinir en A ... ce qui a en plus le mauvais goût de beaucoup compliquer les écritures !*

5 Pour que le chariot franchisse le point C, il faut qu'il y arrive avec une vitesse non nulle. On déduit directement la première condition de la question précédente, la hauteur minimale pour h_A est

$$\boxed{h_A > h_C}$$

Le contact entre le chariot et la piste se traduit par l'existence de la force de réaction $\overrightarrow{R}$. Celle-ci existe tant que

$$mg - \frac{mv_C^2}{r_1} > 0 \qquad \text{soit} \qquad mg - \frac{m}{r_1} 2g(h_A - h_C) > 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{h_A < h_C + \frac{r_1}{2}}\,.$$

B - Looping

6 Considérons de nouveau la conservation de l'énergie mécanique entre le point A et un point quelconque du looping, par exemple celui repéré sur le schéma. Compte tenu de la définition de l'angle θ_2, l'altitude z de ce point est égale à $r_2(1 - \cos\theta_2)$. Ainsi,

$$mgh_A = \frac{1}{2} mv^2 + mgr_2(1 - \cos\theta_2) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v^2 = 2g\left[h_A - r_2\left(1 - \cos\theta_2\right)\right]\,.}$$

7 Appliquons le PFD au chariot,

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$$

> *Attention, comme le mouvement se fait cette fois à l'intérieur du cercle, $\overrightarrow{R} = -R\overrightarrow{u}_{r2} = R_{r2}\overrightarrow{u}_{r2}$ selon que l'on raisonne en termes de norme (toujours positive) ou de composante (ici négative).*

Comme l'expression de l'accélération établie à la question 2 est de nouveau valable ici (le mouvement est circulaire), on trouve en termes de composantes

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{r_2} = mg\cos\theta_2 + R_{r2} \\ m\, r_2\, \ddot{\theta}_2 = -mg\sin\theta_2 \end{cases}$$

en notant R_{r2} la composante sur $\overrightarrow{u}_{r2}$ de la force de réaction. Ainsi,

$$R_{r2} = -\frac{mv^2}{r_2} - mg\cos\theta_2 = -\frac{2mg\left[h_A - r_2\left(1 - \cos\theta_2\right)\right] + mgr_2\cos\theta_2}{r_2}$$

donc

$$R_{r2} = -\frac{mg}{r_2}(2h_A - 2r_2 + 3r_2\cos\theta_2)$$

ce qui permet bien d'écrire

$$\boxed{\overrightarrow{R} = -\frac{mg}{r_2}\left(2h_A - 2r_2 + 3r_2\cos\theta_2\right)\overrightarrow{u}_{r2}}$$

> *La force de réaction est dirigée vers l'intérieur du support : ne pas oublier de remettre le signe à la fin des calculs si vous décidez de raisonner sur la norme !*

8 Le chariot peut faire un tour complet dans le looping si la force de réaction ne s'annule jamais. Cette force est minimale pour $\theta_2 = \pi$ (sommet du looping), et n'est pas nulle tant que

$$2h_A - 2r_2 + 3r_2\cos\pi > 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{h_A > \frac{5}{2} r_2\,.}$$

*La condition $R > 0$ doit être vraie **pour tout $\boldsymbol{\theta_2}$** : votre résultat final ne doit donc pas dépendre de θ_2.*

$\boxed{\mathbf{9}}$ Reprenons les trois conditions établies précédemment. La condition $h_A > h_C$ pour que le chariot franchisse le point C sans décoller n'est pas contraignante sur le rayon r_2 car les deux inégalités portant sur h_A sont de même type : la seule condition imposée est que h_A soit *à la fois* supérieure à h_C et $\frac{5}{2}r_2$. La deuxième condition de non décollement en C impose ensuite

$$\frac{5}{2}r_2 < h_C + \frac{r_1}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{r_2 < \frac{2}{5}h_C + \frac{r_1}{5}\,.}$$