Mécanique des solides

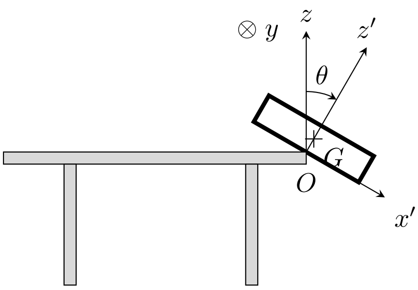
Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : il s'agit d'un entraînement, pas d'une évaluation. Utiliser votre calculatrice, Geogebra ou encore Python est **possible**, et peut parfois vous aider.

Travailler en groupe est **autorisé** mais le travail de rédaction doit être individuel. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou sur Slack. Je rappelle également qu'un travail de groupe est un travail à plusieurs, et pas le travail d'une personne recopié plusieurs fois.

Loi de Murphy

La loi de Murphy, autrement nommée théorème de la tartine à la confiture, est une loi empirique bien connue [1] qu'on pourrait énoncer sous la forme « Tout ce qui est susceptible de mal se passer se passera mal ». L'objectif de cet exercice est de montrer que, malheureusement, la loi de Murphy a de bonnes raisons d'être vérifiée ... au moins en ce qui concerne les tartines à la confiture.



On modélise la tartine à la confiture par un parallélépipède de masse m, de longueur $2a$ dans la direction x', de largeur $2b$ dans la direction y et d'épaisseur $2e$ dans la direction z'. Cette tartine est initialement posée sur une table de hauteur h. Sans faire attention, un maladroit la pousse très lentement vers le bord de la table. Quand le milieu de la tartine atteint le bord, elle entame une rotation autour de l'axe Oy. Dans un premier temps, la tartine ne glisse pas sur la table pendant la rotation.

L'action mécanique de la table sur la tartine est modélisée par une force de réaction

$$\vec{R} = R_x \vec{u}_{x'} + R_z \vec{u}_{z'}$$

dont O est le point d'application. L'inclinaison de la tartine est repérée par l'angle θ. Le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Oy vaut

$$J = \frac{1}{3} m(a^2 + 4e^2)\,.$$

Dans tout cet exercice de « vraie » mécanique du solide, vous serez particulièrement vigilant au point d'application des différentes forces ... et je rappelle à tout hasard que parler de « la » vitesse ou « la » accélération du solide n'a en général pas de sens.

1 - Montrer que la puissance de la force de réaction $\vec{R}$ est nulle. En déduire que

$$\dot\theta^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\,.$$

2 - Appliquer le théorème du moment cinétique pour déterminer une relation entre $\ddot\theta$ et $\sin\theta$.

3 - Par application du théorème de la résultante cinétique à la tartine, montrer que

$$R_x = mg\left(\frac{3e^2}{a^2+4e^2} - 1\right)\sin\theta \qquad \text{et} \qquad R_z = mg\left(\cos\theta - \frac{6e^2(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\right)\,.$$

Simplifier ces expressions en tenant compte des dimensions réelles d'une tartine à la confiture : $a \simeq 5\,\mathrm{cm}$ et $e \simeq 5\,\mathrm{mm}$.

La loi de Coulomb du frottement solide indique que la tartine ne glisse pas tant que $|R_x| \leq \mu |R_z|$ où $\mu \simeq 1$ est le coefficient de frottement solide.

4 - Montrer que l'angle θ_0 à partir duquel la tartine commence à glisser est égal à $\pi/4$. En déduire la vitesse angulaire de la tartine $\dot\theta_0$ à cet instant.

1. La page Wikipédia mi-sérieuse mi-trollesque est assez distrayante.

À partir de cet instant pris comme origine des temps $t = 0$, la tartine quitte la table en un temps très bref en conservant quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$. On suppose que la tartine ne retouche plus la table et on néglige les frottements de l'air.

5 - Déterminer la loi horaire $z_G(t)$, où G est le centre d'inertie de la tartine, une fois qu'elle a quitté la table. En déduire que la tartine touche le sol à l'instant τ tel que

$$\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

6 - Supposons que pendant la phase de vol la vitesse angulaire de la tartine reste constamment égale à $\dot{\theta}_0$. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$. Conclure : de quel côté la tartine tombe-t-elle ?

7 - Deux martiens prennent leur petit-déjeuner. Sont-ils eux aussi soumis à la loi de Murphy ?

Mécanique des solides

Loi de Murphy

> *Un point essentiel dans tout l'exercice (et dans toute la mécanique du solide) est de comprendre que parler de $\vec{v}$ ou $\vec{a}$ sans plus de précision n'a aucun sens. En particulier, la loi de la quantité de mouvement (théorème de la résultante cinétique) ne s'écrit pas $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ mais bien $m\vec{a}_G = \sum \vec{F}$.*

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, que l'on suppose galiléen.

1 La force de réaction $\vec{R}$ s'applique au point O de contact entre la tartine et la table. Or ce point est immobile, $\vec{v}_O = \vec{0}$, d'où

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v}_O = 0\,.}$$

> *Lorsque l'on parle d'un solide, le point à considérer dans les expressions des travaux ou des énergies potentielles est le point où s'applique la force qui dérive de l'énergie potentielle en question.*
>
> *Un autre raisonnement possible consiste à remarquer que $\mathcal{M}_y(\vec{R}) = 0$ car $\vec{R}$ s'applique en un point de l'axe de rotation, donc*
> $$\mathcal{P}(\vec{R}) = \mathcal{M}_y(\vec{R})\,\dot{\theta} = 0$$

La tartine est soumise à son poids $\vec{P}$, qui est conservatif, et à la force de réaction de la table, qui ne travaille pas. Son mouvement est donc conservatif. Comme elle est en mouvement de rotation autour de Oy, son énergie cinétique vaut

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}\,J\,\dot{\theta}^2\,.$$

Son énergie potentielle de pesanteur est reliée à l'altitude z_G de son centre d'inertie G,

$$E_\mathrm{p} = m\,g\,z_G + \mathrm{cte} = m\,g\,e\cos\theta + \mathrm{cte}\,.$$

> *Pour les mêmes raisons que précédemment, il est indispensable d'écrire que le « z » à considérer dans l'expression de l'énergie potentielle est z_G. Ne pas le faire est une erreur.*

L'énergie mécanique de la tartine s'écrit donc à un instant quelconque

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\,J\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,e\cos\theta$$

en choisissant nulle la constante additive. On détermine sa valeur à l'aide de la condition initiale ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$),

$$E_\mathrm{m} = 0 + m\,g\,e\,,$$

et on en déduit finalement

$$\frac{1}{2}\,J\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,e\cos\theta = m\,g\,e \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}\,J\,\dot{\theta}^2 = m\,g\,e(1-\cos\theta) \qquad \text{donc} \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{2mge(1-\cos\theta)}{J}$$

d'où on aboutit finalement à

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\,.}$$

2 Appliquons la loi du moment cinétique à la tartine par rapport à son axe de rotation Oy. La force de réaction de la table est appliquée en O, son moment par rapport à (Oy) est donc nul. Le poids s'applique en G, et son moment en O vaut

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = mge\vec{e}_{z'} \wedge (\sin\theta\,\vec{e}_{x'} - \cos\theta\,\vec{e}_{z'}) = mge\sin\theta\,\vec{e}_{y'} \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{M}_y(\vec{P}) = mge\sin\theta$$

La loi du moment cinétique donne donc

$$J\ddot{\theta} = mge\sin\theta \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{3}m(a^2+4e^2)\ddot{\theta} = mge\sin\theta$$

et on aboutit finalement à

$$\boxed{\ddot\theta = \frac{3ge}{a^2+4e^2}\sin\theta}$$

3 Appliquons le TRC à la tartine, soumise comme précédemment à son poids et à la force de réaction de la table. Comme il s'agit d'un solide, le TRC concerne l'accélération de son centre d'inertie G,

$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}$$

> *Enfonçons le clou : il est **indispensable** de préciser que l'accélération considérée est celle du centre d'inertie, parler simplement de $\vec{a}$ l'accélération de la tartine n'a pas de sens. Pour un solide en mouvement autre qu'une translation, le champ des accélérations n'est pas uniforme.*

Le centre d'inertie G de la tartine est en rotation circulaire autour de l'axe Oy. Le plus simple pour décrire son mouvement est d'utiliser un repérage polaire de centre O, d'autant plus qu'il coïncide avec le repérage (x', z') lié à la tartine. Ainsi, comme $OG = e$,

$$\vec{a}_G = e\ddot\theta\vec{u}_{x'} - e\dot\theta^2\vec{u}_{z'} \,.$$

De plus, dans le répère lié à la tartine,

$$\vec{P} = mg\sin\theta\vec{u}_{x'} - mg\cos\theta\vec{u}_{z'} \,.$$

Ainsi, en projetant le TRC,

$$\begin{cases} me\ddot\theta = R_x + mg\sin\theta \\ -me\dot\theta^2 = R_z - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} R_x = me\ddot\theta - mg\sin\theta \\ R_z = -me\dot\theta^2 + mg\cos\theta \end{cases}$$

et en utilisant les résultats de la question précédente on trouve

$$\boxed{\begin{cases} R_x = mg\left(\dfrac{3e^2}{a^2+4e^2} - 1\right)\sin\theta \\ R_z = mg\left(\cos\theta - \dfrac{6e^2(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2}\right) \end{cases}}$$

Compte tenu des dimensions de la tartine,

$$\frac{e^2}{a^2+4e^2} \simeq 0{,}01 \,.$$

Par ailleurs, on devine (et on montre à la question suivante) que la tartine décolle de la table bien avant d'atteindre $\theta = \pi/2$, et ainsi tant que la tartine est sur la table on a toujours $\cos\theta > 1/\sqrt{2}$ (en utilisant le résultat de la question suivante). Cela permet de simplifier les expressions en

$$\boxed{\begin{cases} R_x = -mg\sin\theta \\ R_z = mg\cos\theta \end{cases}}$$

> *Évoquer la question suivante n'est pas indispensable, mais un commentaire doit être fait sur les valeurs accessibles à l'angle θ : des équations du type $\cos\theta \gg 0{,}05$ sont fausses en général.*

4 En prenant directement $\mu = 1$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la tartine ne glisse pas tant que

$$|R_x| \leq |R_z| \qquad \text{soit} \qquad mg\sin\theta \leq mg\cos\theta \qquad \text{d'où} \qquad \tan\theta \leq 1 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\theta \leq \theta_0 = \frac{\pi}{4}\,.}$$

Par ailleurs, on a montré que

$$\dot\theta^2 = \frac{6ge(1-\cos\theta)}{a^2+4e^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\dot\theta_0 = \sqrt{\frac{6ge}{a^2+4e^2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\,.}$$

5 Une fois que la tartine quitte la table, comme les frottements de l'air sont négligés, elle est en chute libre. Le TRC donne donc

$$m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g}$$

d'où en projetant sur l'axe z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_G}{\mathrm{d}t^2} = -g \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} = -gt + v_{G0z} \qquad \text{et} \qquad \boxed{z_G(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_{G0}\,.}$$

Pour simplifier, comme l'épaisseur e de la tartine est très faible devant la hauteur h de la table, on peut faire les approximations

$$z_{G0} \simeq z_O = 0 \qquad \text{et} \qquad v_{G0z} = e\dot\theta_0 \cos\theta_0 \simeq 0\,,$$

ce qui permet d'aboutir à la loi horaire approchée

$$\boxed{z_G(t) \simeq -\frac{1}{2}gt^2\,.}$$

En négligeant l'effet d'orientation de la tartine, l'instant où elle touche le sol est tel que $z_G(\tau) \simeq -h$, soit

$$-\frac{1}{2}g\tau^2 \simeq -h \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\tau \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.}$$

> *Attention à respecter les notations de l'énoncé. L'origine O du repère se trouve sur la table, pas au niveau du sol, qui est donc à une cote $z < 0$.*

6 Comme à tout instant $\dot\theta(t) = \dot\theta_0$, l'intégration est directe et donne

$$\theta(t) = \dot\theta_0\, t + \theta_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{4} + t\sqrt{\frac{6ge}{a^2+4e^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\,.}$$

Pour conclure, calculons l'angle θ à l'instant où la tartine touche le sol,

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{12he}{a^2+4e^2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 3{,}3\,\mathrm{rad} = 190°\,.$$

Comme $90° < \theta(\tau) < 270°$, alors **la tartine retombe sur le sol côté confiture** ...

7 L'angle $\theta(\tau)$ ne dépend pas de g, donc si les tables et les tartines martiennes font la même taille que sur Terre, **la loi de Murphy s'applique aussi sur Mars**.