

Optique

Durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout autre appareil électronique est interdit.

- ▷ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**
- ▷ La présentation, la lisibilité et l'orthographe font partie des critères d'évaluation. Les candidats sont invités à **numéroter les copies utilisées, à encadrer les résultats de leurs calculs** et à mettre en évidence le numéro des questions. Une **pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note obtenue** sera appliquée aux copies sales et peu soignées.
- ▷ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, **il le signale sur sa copie et poursuit sa composition** en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ▷ Le sujet se compose de **trois parties indépendantes** les unes des autres, que le candidat est libre d'aborder **dans l'ordre de son choix.**
 - La partie I comporte trois questions de cours. Elle représente 13 % du barème.
 - La partie II, adaptée du sujet banque PT 2013, aborde la transmission par fibre optique. Elle représente 41 % du barème.
 - La partie III, extraite du sujet E3a MP 2012, s'intéresse au dimensionnement de caméras de péage urbain. Elle compte pour 46 % du barème.
- ▷ Le sujet est volontairement long pour laisser au candidat le choix des parties sur lesquelles il souhaite se concentrer en priorité. Pour faire ce choix en connaissance de cause, il est recommandé de lire en entier le sujet avant d'entamer la composition.

Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.

Rappel : Relations de conjugaison et de grandissement

On rappelle les relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince, avec les notations usuelles.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

La distance focale *image* est notée $f' = \overline{OF'}$ alors que la distance focale *objet* est notée $f = \overline{OF}$.

Ces relations peuvent être utilisées dans n'importe quelle question à la condition d'adapter les notations à celles de la question.

I - Questions de cours

1 - On considère un laser rouge de longueur d'onde $\lambda \sim 600 \text{ nm}$ et de puissance $P = 1 \text{ mW}$. Calculer l'ordre de grandeur du nombre de photons qu'il envoie en $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$, c'est-à-dire moins que la persistance rétinienne.

2 - Définir le stigmatisme et l'aplanétisme. Dans quelles conditions faut-il utiliser un système optique pour qu'il soit stigmatique et aplanétique ? On attend le nom et une description des conditions en question.

3 - Construire l'image de l'objet AB par la lentille sur la figure 7 du document réponse, page 7.

II - Fibre optique

[adapté banque PT 2013]

Les signaux optiques peuvent être utilisés pour transporter une grande quantité d'information sur de longues distances. L'épreuve complète s'intéresse à quelques caractéristiques d'une ligne de transmission optique. L'extrait proposé ici traite de la propagation guidée dans une fibre optique et d'un des problèmes qui altèrent la qualité de la transmission et limitent le débit.

II.A - Lois de Descartes

On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents et homogènes : le milieu (1) d'indice n_1 et le milieu (2) d'indice n_2 , voir figure 1. De la lumière se propage du milieu (1) vers le milieu (2). On isole un rayon frappant le dioptre en I , et formant un angle i_1 avec (N) , normale au dioptre en I . On observe l'existence d'un rayon réfléchi dans le milieu (1) formant un angle i'_1 avec (N) et éventuellement d'un rayon réfracté formant un angle i_2 avec (N) . Les angles sont non-orientés.

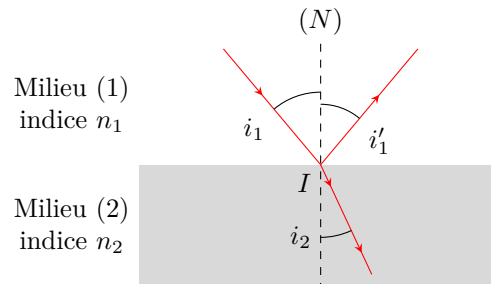


Figure 1 – Lois de Descartes.

4 - À quelle condition peut-on considérer que la lumière est constituée de rayons lumineux indépendants ?

5 - Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction et à la réflexion.

6 - Décrire le phénomène de réflexion totale. Établir notamment une condition sur les indices et une condition sur l'angle i_1 .

II.B - Principe physique de fonctionnement

Une fibre optique est un fin cylindre de verre, capable de guider la lumière sur de longues distances, voir figure 2. Un rayon lumineux entrant à une extrémité de la fibre reste piégé à l'intérieur par réflexion totale interne. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique d'indice n_1 d'un diamètre d'environ $50 \mu\text{m}$ entouré par une gaine d'indice n_2 .

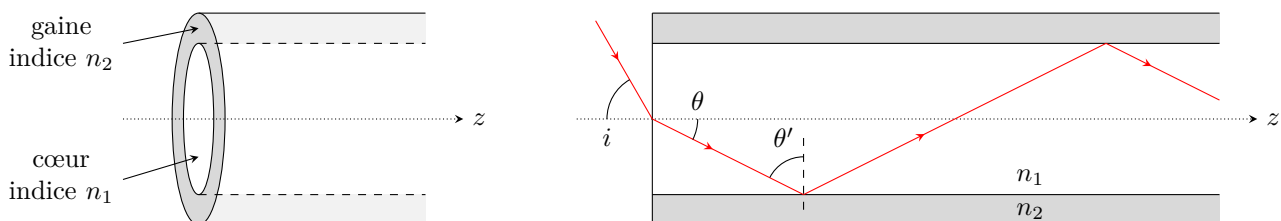


Figure 2 – Schéma d'une fibre optique. Vue en perspective, à gauche, et vue en coupe dans le plan méridien, à droite.

7 - Lequel des deux indices du cœur ou de la gaine doit être le plus grand des deux ?

8 - Montrer que tout rayon situé dans un plan contenant l'axe de la fibre et formant dans la fibre un angle θ avec l'axe peut se propager dans le cœur en restant dans ce plan si $\theta < \theta_c$, avec $\theta_c = \arccos(n_2/n_1)$.

9 - Que risque-t-il de se passer si la fibre est trop courbée ? La réponse pourra s'appuyer sur un schéma.

II.C - Dispersion intermodale

Une fibre optique est qualifiée de multimode lorsqu'elle transporte la lumière le long de plusieurs rayons. On raisonne sur deux rayons se propageant dans une fibre à saut d'indice de longueur L , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de $\theta_c = \arccos(n_2/n_1)$ par rapport à celui-ci.

10 - Exprimer la longueur parcourue par le rayon non parallèle à l'axe en fonction de L et θ_c , puis L , n_1 et n_2 .

11 - En déduire la différence de temps de parcours Δt_m entre les deux rayons lumineux, à exprimer en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

De cette différence de temps de parcours résulte un étalement temporel du signal. Ce phénomène est la dispersion intermodale ou dispersion de mode. Une série d'impulsions lumineuses ultra-courtes servant de bits est envoyée dans la fibre. On note T la période de répétition du signal, c'est-à-dire l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives, voir figure 3.

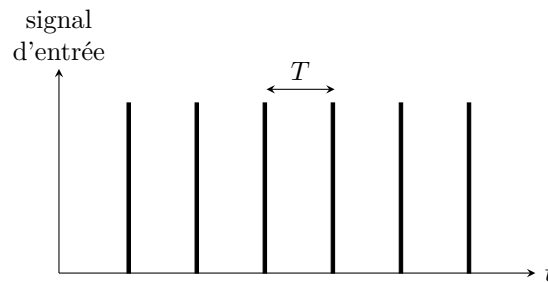


Figure 3 – Signal en entrée de la fibre optique.

12 - En expliquant clairement le raisonnement, représenter l'allure du signal récupéré à la sortie de la fibre dans le cas où $\Delta t_m < T$ et dans le cas où $\Delta t_m > T$.

13 - On note BP_m la bande-passante de la fibre associée à la dispersion intermodale : BP_m représente la fréquence maximale des signaux pouvant transiter dans la fibre. Exprimer BP_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

14 - On considère $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$. Évaluer numériquement BP_m avec un chiffre significatif pour $L = 10$ m et $L = 1$ km. Commenter. Compte tenu des valeurs d'indices, on pourra simplifier l'expression de BP_m pour procéder au calcul numérique.

15 - Les fournisseurs d'accès internet proposent des offres « fibre optique » avec des débits allant jusqu'à 1 Gbit/s. Proposer une solution technologique permettant d'atteindre un tel débit.

16 - Pour limiter la dispersion intermodale, on peut aussi utiliser une fibre à gradient indice : c'est une fibre dont l'indice n_1 du cœur dépend de la distance r à l'axe. Quel doit être le sens de variation de $n_1(r)$? Représenter qualitativement la trajectoire d'un rayon arrivant dans la fibre en formant un angle θ avec l'axe.

II.D - Ouverture numérique

L'ouverture numérique est une caractéristique d'une fibre optique donnant l'inclinaison maximale admissible pour le rayon d'entrée pour qu'il soit guidé dans la fibre. Elle est définie par

$$ON = \sin i_{\max}$$

où i est l'angle d'incidence sur la fibre défini figure 2.

17 - Montrer que $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. On pourra commencer par exprimer ON^2 en fonction de $\cos^2 \theta_c$.

On pose $n_1 = n_2 + \delta n$, avec $\delta n \ll n_1, n_2$.

18 - Montrer que $ON \simeq \sqrt{2 n_2 \delta n}$.

19 - Évaluer numériquement ON pour $n_1 = 1,53$ et $n_2 \simeq 1,50$.

III - Dimensionnement des caméras de péage urbain

[e3a MP 2012]

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre-ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en œuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, mis en place en 2003 et appelé « London Congestion Charge », utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (Lecture Automatique des Plaques d'Immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation.

Document 1 : Caméras de péage urbain

Les caméras de contrôle urbain doivent être robustes, peu coûteuses, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnelles dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu, voir figure 4, comporte deux caméras identiques : l'une enregistre dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce à un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.

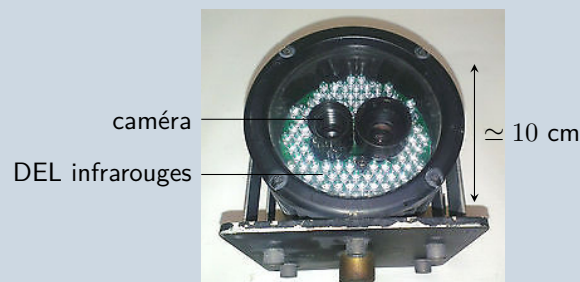


Figure 4 – Caméra P362 développée par la société PIPS.

Le capteur CCD (charge coupled device) de ces caméras est un rectangle de diagonale $1/4''$, découpé en 752×582 pixels (largeur \times hauteur). Une fois les conversions faites, cela donne une taille de $5,02 \text{ mm} \times 3,89 \text{ mm}$. Les pixels sont des carrés de côté $a \simeq 7 \mu\text{m}$ tous identiques. Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, les caméras ont une distance focale image f' fixe. Le constructeur propose différents modèles, présentés figure 5, destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure L prédéterminée.

Modèle	1	2	3	4	5
Focale f' (mm)	35,0	25,0	16,0	12,0	8,00
Distance de mesure L (m)	20,0	14,5	9,0	7,0	4,5
Rapport f'/L ($\times 10^{-3}$)	1,75	1,72	1,78	1,71	1,78

Figure 5 – Modèles de caméra proposés par le constructeur.

Document 2 : Norme britannique des plaques d'immatriculation

La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est représentée ci-dessous. Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.



III.A - Dimensionnement des caméras

Les caméras sont constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image f' qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation. La figure 6 illustre cette configuration.

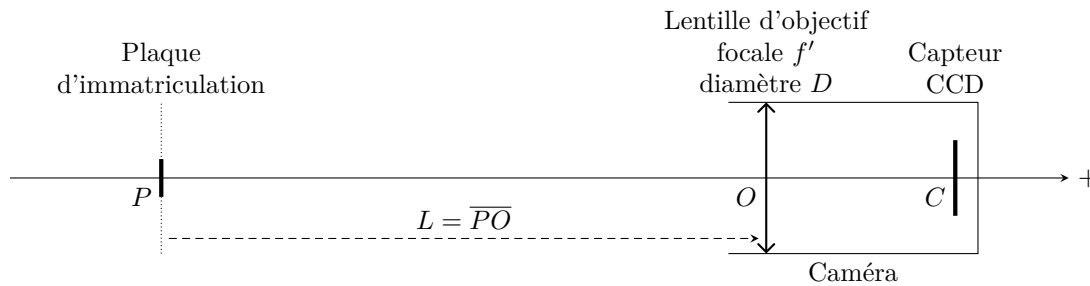


Figure 6 – Schéma de situation. Les échelles relatives ne sont pas respectées.

20 - Établir la condition que doivent vérifier f' (distance focale image de la lentille) et PC (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que cette opération soit possible.

21 - Exprimer la distance \overline{OC} en fonction de $L = \overline{PO}$ et $f' = \overline{OF'}$. Justifier que la lentille doit nécessairement être convergente. Simplifier cette expression en tenant compte des valeurs numériques de la figure 5. Commenter.

22 - Exprimer le grandissement γ de la plaque en fonction de L et f' . Simplifier de même l'expression de γ . Commenter les valeurs numériques de γ pour les différents modèles de caméra. Quel peut en être l'intérêt ?

Pour les questions suivantes, on raisonnera sur une valeur approchée du grandissement prise égale à $2 \cdot 10^{-3}$.

23 - Connaissant les dimensions du capteur CCD, indiquées dans l'introduction, déterminer les dimensions du champ visuel de la caméra, exprimées en mètres dans le plan d'observation (c'est-à-dire le plan où se trouve la plaque de la voiture filmée). Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder à la zone payante ?

24 - Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres puis en pixels. Commenter la valeur numérique en pixels en expliquant le choix industriel.

25 - Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de γ qui repose sur un compromis entre deux contraintes antagonistes. Préciser lesquelles.

26 - Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ? Quels sont les avantages à filmer une seconde image en infrarouge ?

Les lentilles de ces caméras ont un diamètre $D = 1,0$ cm. Elles se comportent donc comme une pupille circulaire qui diffracte la lumière. L'image d'une source ponctuelle n'est donc pas un point mais présente une certaine étendue spatiale due à la diffraction.

27 - Calculer, pour la caméra de modèle 1, l'ordre de grandeur de la largeur de la tâche de diffraction de l'image d'un point sur le capteur CCD pour le rayonnement infrarouge utilisé. Comparer ce phénomène à la pixellisation de l'image. Limite-t-il la résolution ?

III.B - Profondeur de champ

Bien que les caméras ne possèdent pas de dispositif de mise au point (leur distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance L spécifiée par le constructeur, voir figure 5. Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ Δ , c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette. Il est rappelé que le diamètre de la lentille vaut $D = 1,0$ cm.

Le document réponse page 7, à rendre avec la copie, comporte différentes figures où un objet ponctuel est situé sur l'axe optique. Les constructions ne sont pas à l'échelle et ont pour seul but d'illustrer le phénomène. Un soin particulier est attendu dans la réalisation des constructions, dont la démarche doit être rigoureusement justifiée. En particulier, les propriétés de la lentille permettant la construction doivent être explicitement nommées.

Sur la figure 8, l'objet est situé en P_0 , à la distance L spécifiée par le constructeur.

28 - Compléter cette figure en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de P_0 et atteignant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Représenter la position de l'image C_0 de ce point P_0 par la lentille d'objectif.

Le capteur CCD est positionné dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par C_0 . L'objet ponctuel P_1 est maintenant placé à une distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0 .

29 - Compléter la figure 9 du document réponse en y représentant

- ▷ le plan du capteur CCD, obtenu en reportant le point C_0 de la construction figure 8 ;
- ▷ le trajet des deux rayons lumineux issus de P_1 et atteignant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés.

L'image est notée C_1 .

Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre $d_1 > 0$ qui doit être inférieur à la taille a d'un pixel pour que l'image soit nette.

30 - Montrer que le diamètre de la tâche image, notée d_1 , peut s'exprimer sous la forme

$$d_1 = \frac{D f' \Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)}$$

31 - Compléter la figure 10 dans le cas où $\overline{P_0P_2} = -\Delta_2 < 0$ ($\Delta_2 > 0$ est une distance non-algébrique).

On montre alors comme précédemment que le diamètre de la tâche image peut s'exprimer sous la forme

$$d_2 = \frac{D f' \Delta_2}{(L - f')(L + \Delta_2)}$$

32 - Simplifier les expressions de d_1 et d_2 compte tenu des ordres de grandeur de L et f' indiqués figure 5.

33 - Exprimer en fonction de a , L , D et f' les distances $\Delta_{1,\text{lim}}$ et $\Delta_{2,\text{lim}}$ telles que la tâche image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel. Calculer leurs valeurs numériques pour le modèle de caméra n° 3.

34 - En déduire l'expression de la profondeur de champ Δ en fonction de f' , D , a et L . Simplifier cette expression en tenant compte des valeurs numériques de l'énoncé et calculer sa valeur numérique.

35 - Commenter le choix d'une lentille de petit diamètre pour réaliser cette caméra.

Document réponse à rendre avec la copie

Nom du candidat :

Figure à compléter pour la partie I :

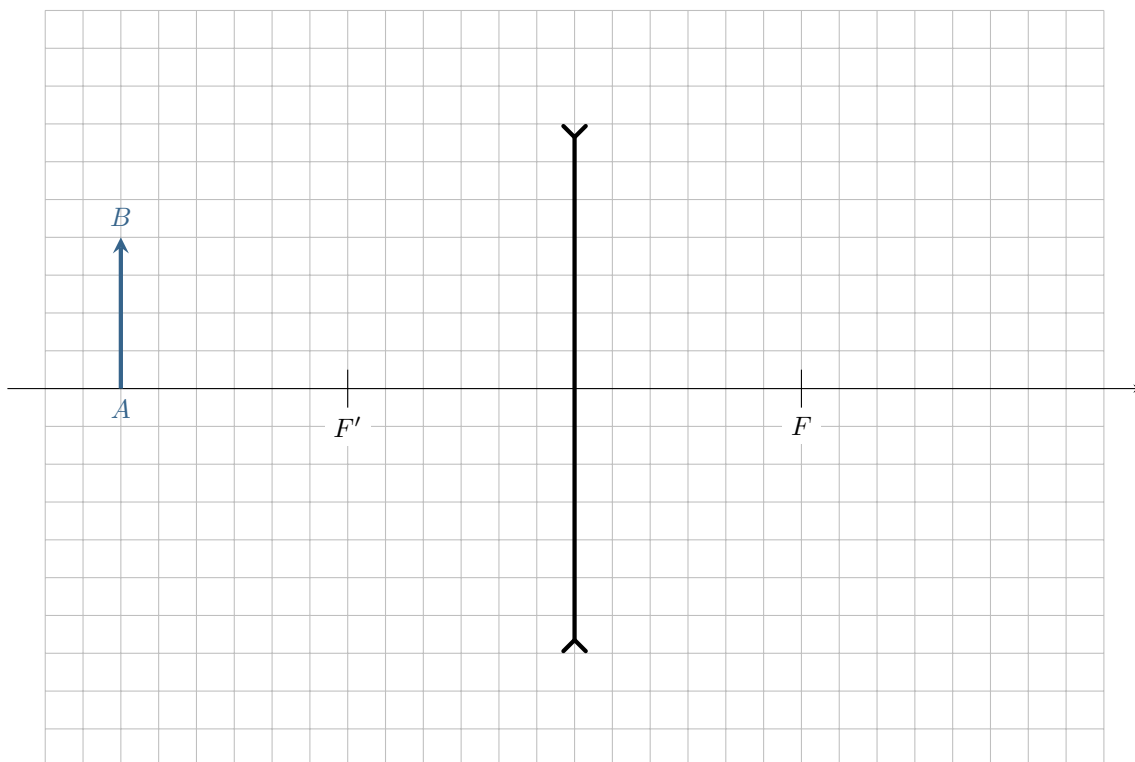


Figure 7 – Construction d'image par une lentille divergente.

Figures à compléter pour la partie III.B :

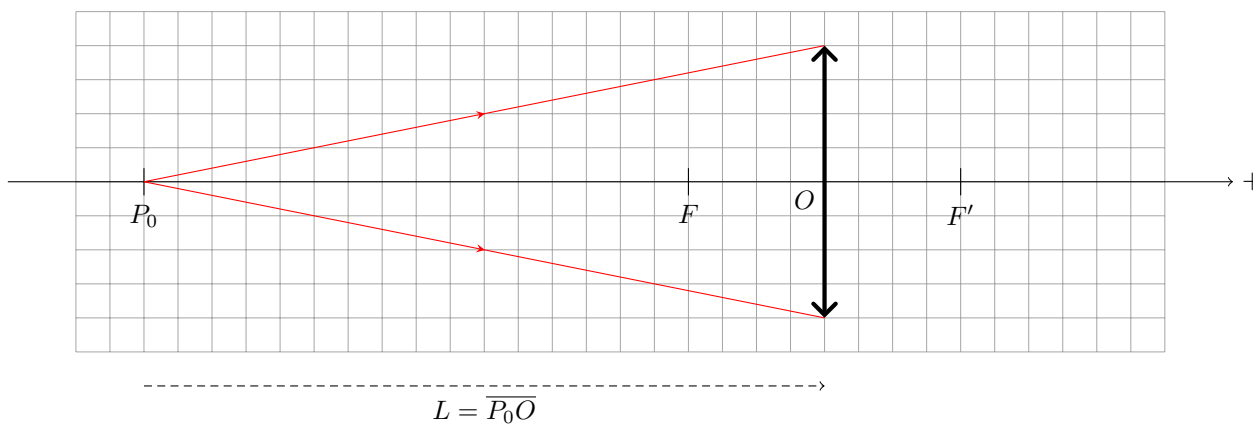


Figure 8 – Profondeur de champ, première situation. L'objet ponctuel est situé en P_0 , à la distance L spécifiée par le constructeur.

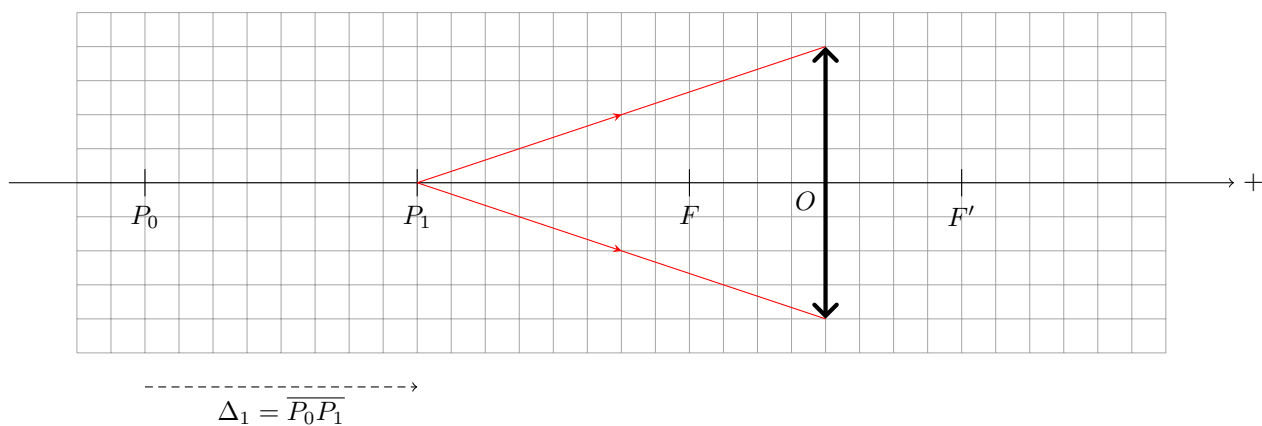


Figure 9 – Profondeur de champ, deuxième situation. L'objet ponctuel est situé en P_1 , à la distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0 .

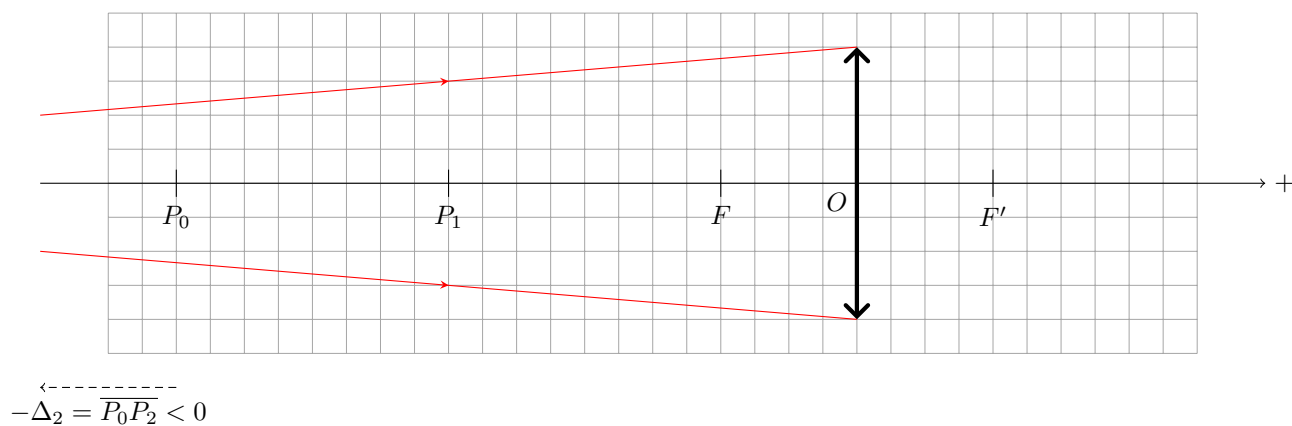
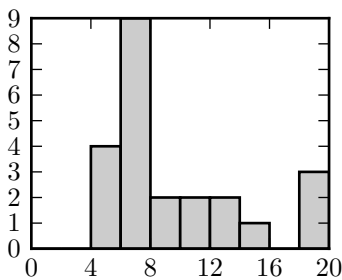


Figure 10 – Profondeur de champ, troisième situation. L'objet ponctuel est situé en P_2 , à la distance $\Delta_2 = -\overline{P_0P_2} > 0$ de P_0 . Le point P_2 est en dehors de la figure.

Optique

Bilan du devoir

Notes



- ▷ Barème brut sur 90,5, transformé en note sur 20 par proportionnalité.
- ▷ Moyenne de la classe : 15/90, arbitrairement (et généreusement) choisie à 10/20. Le devoir est plutôt raté.
- ▷ Les notes sont très étalées, comprises entre 4,5/20 et ... 23/20 (35/90), sans que la copie ne soit exempte d'erreur pour autant. Trois copies se détachent très nettement en tête de classe, onze copies ont des notes comprises dans un intervalle assez serré entre 6,5 et 9.

Commentaires principaux

- ▷ Tout le monde ou presque a fait un effort d'apprentissage au moins des formules du cours, mais la majeure partie de la classe n'est pas (encore) capable de les utiliser à bon escient dans un énoncé.
- ▷ Plus gênant, vous êtes beaucoup trop nombreux à ne pas savoir refaire les exercices de cours dès que les notations diffèrent un tout petit peu (questions 6, 20, 21, 22). Tout le monde doit passer ce cap le plus rapidement possible. Cela passe par plus d'entraînement et de pratique à la maison ... Les questions qui devraient être faisables par toute la classe (1 à 3, 4 à 7, 9, 10, 11, 18, 19, 20 à 24, 26, 28, 29, 31, 32) rapportent 55 points ! Comparez à la moyenne de classe :(
- ▷ La gestion du temps et du sujet est catastrophique chez beaucoup, et explique en partie certaines notes décevantes. Plutôt que de perdre du temps dans les questions plus difficiles de la partie II, vous auriez dû constater que beaucoup de questions de la partie III étaient plus simples et aller y chercher des points.
- ▷ Vous avez une grande tendance à l'arnaque, et à affirmer des résultats que vous ne comprenez pas. Le bluff ne rapportant aucun point, perdez vite, très vite, cette habitude ! Ce faisant, vous décrédibilisez votre travail. **Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.**
- ▷ « Établir » est synonyme de démontrer.

Erreurs trop courantes à éviter

- 6 - C'est une question de cours, et pourtant le bilan est calamiteux. Une démonstration est attendue.
- 8 - Énormément d'arnaque dans cette question, faute de poser un raisonnement en deux étapes, d'abord une condition sur θ' pour en déduire celle sur θ . Certains escrocs sont allés jusqu'à écrire les lois de Descartes avec des cosinus ... sans bien sûr savoir pourquoi.
- 10 - Que d'erreurs sur cette question ! Le trajet incliné étant plus long, cela doit se voir dans le résultat en $1/\cos\theta_c$!!
- 11 - Attention, dans la gaine la lumière se propage à c/n_1 mais pas à c .
- 13 - Beaucoup d'entre vous affirment que $T = 1/\Delta t_m$, mais personne n'est en mesure d'expliquer pourquoi. **Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.**
- 18 - La réponse étant donnée, il n'était pas trop dur d'y arriver, mais beaucoup de justifications sont loin d'être convaincantes.
- 20 - Même remarque qu'à la question 6. Une démonstration est attendue.
- 21 - Application directe du cours ... La justification du signe de f' est rarement faite rigoureusement.
- 28 - Personne ne mentionne le stigmatisme !

I - Questions de cours

❖ *Barème : 6,5 pts au total*

1 Énergie totale arrivant sur l'écran :

$$E = P \times \Delta t = 1 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Énergie d'un photon du faisceau laser : un photon a une fréquence $\nu = c/\lambda = 5 \cdot 10^{14}$ Hz donc une énergie $\varepsilon = h\nu = 3 \cdot 10^{-19}$ J.

Nombre de photons contenus dans le faisceau :

$$E = N\varepsilon \quad \text{donc} \quad N = \frac{E}{\varepsilon} \sim 10^{14}.$$

❖ *Barème : 2 pts : 0.5 par calcul.*

2 Un système optique est dit stigmatique si l'image qu'il donne d'un objet ponctuel est ponctuelle également. Il est dit aplanétique si tous les points objet d'un plan de front (plan perpendiculaire à l'axe optique) ont leur image dans un même plan de front.

Pour être approximativement stigmatique et aplanétique, un système optique doit être utilisé **dans les conditions de Gauss** : tous les rayons entrant dans le système doivent être paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu inclinés.

❖ *Barème : 2 pts : 0.5 par définition*

3 Voir figure 11.

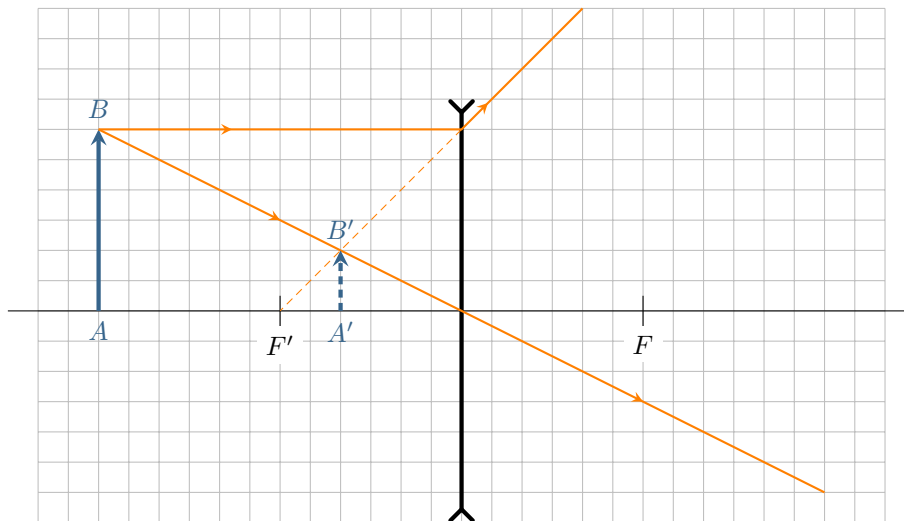


Figure 11 – Construction d'image par une lentille divergente.

❖ *Barème : 2.5 pts : 0.5 pt pour le rayon passant par O, 1 pour celui passant par F' ou F, 0.5 pt pour l'image, 0.5 pt pour le soin et les conventions (rayons fléchés, pointillés).*

II - Fibre optique

[adapté banque PT 2013]

❖ *Barème : 39 pts au total*

II.A - Lois de Descartes

4 La lumière peut être considérée comme formée de rayons indépendants **lorsque les phénomènes de diffraction (et d'interférences) sont négligeables**, soit en pratique lorsque la taille des ouvertures par lesquelles passe la lumière est **très supérieure à sa longueur d'onde**.

❖ *Barème : 2 pts*

5
 ▷ Les rayons incident, réfléchi et réfracté (lorsqu'il existe) appartiennent au même plan, appelé plan d'incidence.

- ▷ Le rayon incident et le rayon réfléchi sont situés de part et d'autre de la normale et forment des angles par rapport à cette normale tels que $i'_1 = i_1$.
- ▷ Lorsqu'il existe, le rayon réfracté et le rayon incident sont situés de part et d'autre de la normale et forment des angles par rapport à cette normale tels que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

❖ **Barème : 3 pts**

Attention, l'énoncé précise que les angles sont non-orientés ... donc normalement pas de signe - à mettre. Ceci dit, je trouve cela plus prudent de le garder. Les deux réponses sont comptées justes.

6 Il y a réflexion totale lorsque le rayon réfracté n'existe plus : toute l'énergie lumineuse est réfléchie dans le milieu (1). Ce phénomène a lieu lorsque **le milieu (1) est plus réfringent que le milieu (2) ($n_1 > n_2$)** et que l'angle d'incidence i_1 est supérieur à un angle limite $i_{1,\text{lim}}$. Cet angle $i_{1,\text{lim}}$ est tel que $i_2 = \pi/2$, d'où

$$n_1 \sin i_{1,\text{lim}} = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \quad \text{d'où} \quad \sin i_{1,\text{lim}} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{soit} \quad \boxed{i_{1,\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}}$$

❖ **Barème : 4 pts : 1 pt pour la définition, 1 pt pour les indices, 2 pts pour la démo de l'angle limite.**

II.B - Principe physique de fonctionnement

7 Pour qu'il puisse y avoir réflexion totale à l'interface cœur \rightarrow gaine, il faut que la gaine soit moins réfringente que le cœur, c'est-à-dire

$$\boxed{n_2 < n_1}$$

❖ **Barème : 1 pt**

8 La gaine étant moins réfringente que le cœur de la fibre optique, une réflexion totale peut avoir lieu à l'interface cœur-gaine à condition que l'angle d'incidence θ' vérifie la condition établie question 6

$$\sin \theta' > \sin \theta'_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Géométriquement, la somme des angles dans le triangle défini par la normale au premier point d'incidence, l'axe z , et le premier rayon à l'intérieur de la fibre donne $\theta + \theta' + \pi/2 = \pi$, d'où $\theta' = \pi/2 - \theta$. Ainsi,

$$\sin \theta' = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

ce qui donne comme condition de réflexion totale

$$\cos \theta > \cos \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta < \arccos \frac{n_2}{n_1} = \theta_c}$$

Évitez d'écrire les angles en degré, mais utilisez systématiquement des radians.

La fonction $x \mapsto \arccos x$ est une fonction décroissante, donc le sens de l'égalité change. Pour retrouver le signe correct ou vérifier vos calculs, vous pouvez (devez) constater à partir de la figure que θ diminue lorsque i augmente.

❖ **Barème : 4 pts : 1 pt pour θ' , 2 pts pour le passage à $\cos \theta$, 1 pt pour le résultat.**

9 Une courbure de la fibre a pour effet de diminuer l'angle d'incidence à l'interface cœur \rightarrow gaine, qui peut alors devenir plus petit que θ'_{lim} . **Il n'y a alors plus de réflexion totale, et donc une fuite de lumière hors de la fibre.**

❖ **Barème : 1 pt**

II.C - Dispersion intermodale

10 D'après le schéma figure 12, lorsqu'un rayon incliné de θ_c avance de la distance BC le long de la fibre, il parcourt en fait la distance $AC = BC / \cos \theta_c$. La même démonstration se généralise à chaque réflexion. On en déduit que lorsqu'un rayon incliné de θ_c se propage dans une fibre de longueur L il parcourt la distance

$$L' = \frac{L}{\cos \theta_c} \quad \text{soit} \quad \boxed{L' = \frac{n_1}{n_2} L}$$

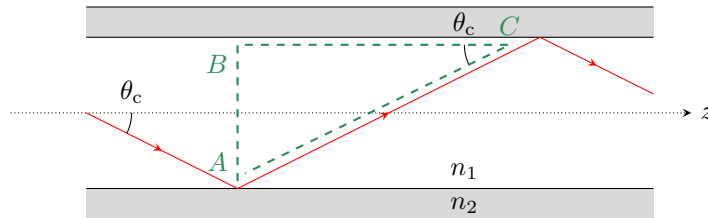


Figure 12 – Schéma en coupe du plan méridien d'une fibre optique.

❖ **Barème** : 3 pts : 2 pts pour l'expression avec θ_c , 1 pt pour celle avec les indices.

11 Les rayons se propagent dans le cœur de la fibre optique à la célérité c/n_1 . Ainsi,

$$\Delta t_m = \frac{n_1 L'}{c} - \frac{n_1 L}{c} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c} - \frac{n_1 L}{c}$$

En factorisant, on en déduit

$$\Delta t_m = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right).$$

❖ **Barème** : 2 pts

12 Une impulsion de lumière envoyée à l'entrée de la fibre se propage *simultanément* le long de tous les rayons ayant des angles $0 \leq \theta \leq \theta_c$. Comme ces rayons ne mettent pas la même durée pour parcourir la fibre, un premier effet de la dispersion de mode est d'étaler les impulsions. Si une impulsion est ultra-courte en entrée (comprendre « de durée négligeable »), alors elle dure un temps Δt_m en sortie. Si $\Delta t_m < T$ les impulsions sont élargies, mais toujours séparées. Si $\Delta t_m > T$, les impulsions se recouvrent et ne sont plus distinguables. De plus, la montée des impulsions est rendue plus progressive : au début du front montant de l'impulsion, moins de rayons contribuent au signal de sortie qu'à la fin. Le signal de sortie est représenté figure 13.

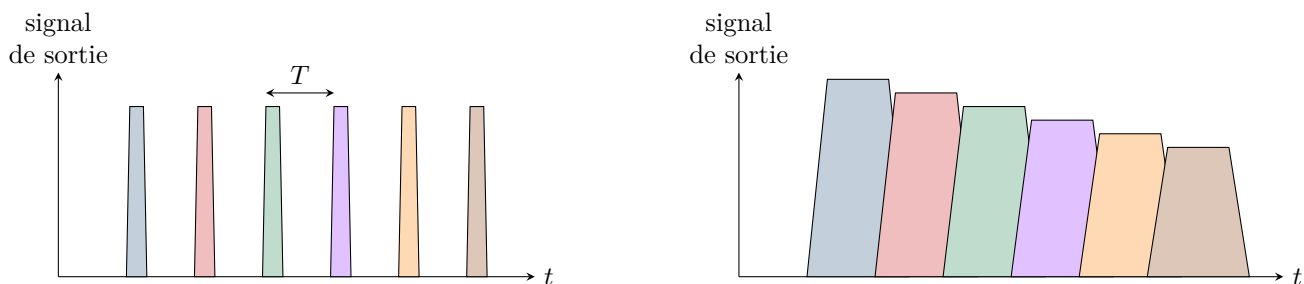


Figure 13 – Signal en sortie de la fibre optique. Gauche : cas $\Delta t_m < T$. Droite : cas $\Delta t_m > T$, les impulsions ont été représentées d'amplitude différente pour bien montrer le recouvrement, mais ce n'est qu'une « astuce » pour mieux le visualiser.

❖ **Barème** : 5 pts : 2 pts pour l'étalement, 2 pts pour l'éventuel recouvrement, 1 pt pour le temps de montée

13 Pour que deux impulsions soient distinguables à la sortie de la fibre optique, il faut que la période d'émission (égale à la durée qui les sépare) soit telle que $T > \Delta t_m$. Ainsi, la fréquence maximale acceptable BP_m est

$$BP_m = \frac{1}{\Delta t_m} \quad \text{soit} \quad BP_m = \frac{c}{L} \frac{n_2}{n_1(n_1 - n_2)}.$$

❖ **Barème** : 1 pt

14 Pour le calcul numérique, il est suffisant d'approximer

$$\frac{n_2}{n_1(n_1 - n_2)} \simeq \frac{1}{n_1 - n_2}$$

ce qui donne $BP_m = 1 \text{ GHz}$ pour $L = 10 \text{ m}$ et $BP_m = 10 \text{ MHz}$ pour $L = 1 \text{ km}$. La diminution de débit avec la distance est très importante, ce qui pose problème pour fournir un accès internet haut-débit.

❖ *Barème : 2 pts : 1 pt par valeur*

15 Une solution possible est d'utiliser des répéteurs, régulièrement répartis le long de la fibre, qui reçoivent le signal avant que les impulsions ne se soient recouvertes, le traitent, et rémettent des impulsions de durée aussi courte que possible en reproduisant le code binaire du signal initial. En pratique cette solution n'est pas viable : d'après le calcul précédent, il faudrait placer un répéteur tous les dix mètres ! Il faut utiliser pour cela des fibres particulières où un unique rayon peut se propager, celui avançant le long de l'axe. Une telle fibre est dite monomode.

L'existence de fibres monomodes ne peut pas se comprendre à partir du modèle géométrique proposé ici, mais à partir d'un modèle électromagnétique qui fait l'objet d'une autre partie du sujet : je n'attends donc évidemment pas que vous en parliez !

Les répéteurs sont utilisés malgré tout, mais pour compenser les pertes de puissance par absorption, qui se font sur des distances bien supérieures.

❖ *Barème : 1 pt*

16 Pour qu'un rayon se propageant dans une fibre à gradient d'indice puisse être guidé le long de l'axe, il faut qu'il y soit ramené lorsqu'il s'en éloigne. Il faut donc que n_1 soit une fonction décroissante de r : l'indice est maximal au centre et minimal sur les bords. Comme le milieu est d'indice variable, le rayon ne se propage plus en ligne droite mais suit une trajectoire courbe (exactement comme pour un mirage), représentée figure 14.

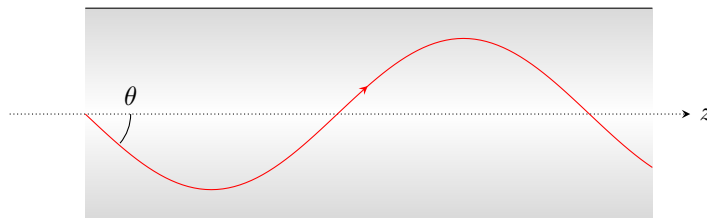


Figure 14 – Propagation dans une fibre à gradient d'indice.

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt pour le sens du gradient, 2 pts pour la trajectoire.*

II.D - Ouverture numérique

17 Lorsque $i = i_{\max}$, alors par définition l'angle de réfraction dans la fibre est égal à θ_c . D'après la loi de la réfraction, on a donc

$$1 \times \sin i_{\max} = n_1 \sin \theta_c \quad \text{soit} \quad ON = n_1 \sin \theta_c.$$

Ainsi,

$$ON^2 = n_1^2 \sin^2 \theta_c = n_1^2 [1 - \cos^2 \theta_c]$$

et en remplaçant θ_c par l'expression trouvée question 8

$$ON^2 = n_1^2 \left[1 - \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] = n_1^2 - n_2^2$$

ce qui donne directement

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

❖ *Barème : 4 pts : 2 pts pour l'expression avec $\cos \theta_c$, 2 pts pour le résultat.*

18 Si $n_1 = n_2 + \delta n$, alors

$$n_1^2 = n_2^2 + 2n_2\delta n + \delta n^2$$

Ainsi,

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{2n_2\delta n + \delta n^2}$$

Compte tenu des valeurs numériques données à la question suivante, $2n_2 \sim 3 \gg \delta n \sim 3 \cdot 10^{-2}$. Le terme δn^2 est donc négligeable devant $2n_2\delta n$. On en déduit

$$ON \simeq \sqrt{2n_2 \delta n}.$$

❖ **Barème** : 2 pts : 0.5 pt pour l'idée, 1 pt pour le terme négligeable et la justification, 0.5 pt pour le résultat. Attention, erreur dans les copies : question notée sur 4 puis divisée par 2 ensuite. Désolé.

19 Pour ces valeurs d'indice, $\delta n = 0,03$, d'où

$$ON = 0,3.$$

❖ **Barème** : 1 pt

III - Dimensionnement des caméras de péage urbain

[e3a MP 2012]

❖ **Barème** : 46 pts au total

III.A - Dimensionnement des caméras

20 D'après la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{OC}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'}$$

Comme $\overline{OC} = PC - PO = PC - L$ et $\overline{OP} = -L$, alors

$$\frac{1}{PC - L} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'}$$

En multipliant l'ensemble par $(PC - L)Lf'$, on obtient

$$Lf' + (PC - L)f' = (PC - L)L$$

ce qui donne une équation polynomiale du second degré en L ,

$$L^2 - PC \times L + PC \times f' = 0.$$

L est une distance et doit donc être réelle positive. Cela n'est compatible que si le discriminant de l'équation est positif, c'est-à-dire

$$PC^2 - 4PCf' \geq 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{PC \geq 4f'}$$

❖ **Barème** : 3 pts : 1 pt pour le passage aux notations, 1 pour le polynôme, 1 pour la résolution.

21 D'après la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{OC}} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OC}} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L}$$

et on trouve finalement

$$\boxed{\overline{OC} = \frac{f' L}{L - f'}}$$

Comme $L > f'$ et que \overline{OC} doit être positif (l'image doit être réelle) alors cela impose d'avoir $f' > 0$, c'est-à-dire que **la lentille doit forcément être convergente**. Le tableau indique que L est de l'ordre de 10 m et f' de l'ordre de 10 mm : on peut donc faire l'approximation $L - f' \simeq L$, ce qui conduit à

$$\overline{OC} \simeq \frac{f' L}{L} \quad \text{soit} \quad \boxed{\overline{OC} \simeq f'}$$

Finalement, on trouve que l'image se forme pratiquement dans le plan focal image de la lentille d'objectif, autrement dit **tout se passe presque comme si la plaque d'immatriculation était située à l'infini par rapport à la caméra**, ce qui est bien cohérent avec les valeurs de L .

❖ **Barème** : 3 pts : 1 pt pour le calcul, 1 pt pour la simplification et le commentaire, 1 pt pour justifier que la lentille est convergente

22 D'après la relation de grandissement avec origine au foyer,

$$\gamma = \frac{f'}{FP} \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma = \frac{f'}{-(L - f')} \simeq -\frac{f'}{L}}$$

D'après le tableau, le grandissement est à peu près le même quel que soit le modèle de caméra. Cela permet d'avoir toujours une image de même taille, et donc **d'utiliser le même capteur et le même algorithme de lecture quelle que soit la caméra.**

❖ *Barème : 3 pts : 1.5 pt pour le calcul, 0.5 pour la simplification et 1 pour le commentaire*

23 Les dimensions d du capteur CCD donnent la taille maximale de l'image. En « inversant » la relation de grandissement, on en déduit la taille maximale D de l'objet dont l'image peut être observée sur le capteur,

$$|\gamma| = \frac{d}{D} \quad \text{soit} \quad D = \frac{d}{|\gamma|}$$

Numériquement, la zone filmée mesure environ $2,5 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$. Cela correspond en ordre de grandeur à la largeur d'une voie de circulation : il faut donc installer **une caméra par voie de circulation**, une seule caméra ne suffit pas pour les routes à plusieurs voies.

❖ *Barème : 2 pts : 1.5 pour le calcul, 0.5 pour le commentaire*

24 L'énoncé indique qu'un caractère de la plaque d'immatriculation a une largeur de 50 mm. D'après la relation de grandissement, son image sur le capteur CCD mesure

$$2 \cdot 10^{-3} \times 50 = 100 \mu\text{m}.$$

Comme un pixel du capteur mesure $7 \mu\text{m}$, cette largeur sur le capteur correspond à environ 14 pixels. Sachant que l'épaisseur du trait sur la plaque est de l'ordre du tiers de la largeur (disons 2 cm), on en déduit que l'image est très pixellisée. **L'algorithme de lecture doit être très performant, et le système a été optimisé pour être en limite de résolution.** C'est évidemment cohérent avec l'objectif de moindre coût : un capteur avec plus de pixels coûte plus cher.

❖ *Barème : 2 pts : 1 pour le calcul, 1 pour le commentaire*

25 Si le grossissement est augmenté, la taille d'un caractère sur le capteur CCD augmente également, et il est donc plus facile à lire. En contrepartie, le champ visuel de la caméra diminue, si bien que cela pourrait nécessiter d'installer plusieurs caméras pour une même voie. Un compromis a donc dû être choisi **entre champ visuel et taille de l'image sur le capteur.**

❖ *Barème : 1 pt*

26 Les images prises dans le domaine visible risqueraient d'être peu exploitables de nuit lorsque les phares sont allumés : la caméra serait alors éblouie. Un flash est envisageable du point de vue optique, mais serait très gênant pour les conducteurs. L'utilisation de l'infrarouge permet de remédier à ce problème : d'une part les phares émettent moins dans le domaine IR que dans le domaine visible, et d'autre part le flash fourni par les DEL de la caméra ne gêne pas le conducteur tout en éclairant la plaque.

❖ *Barème : 1 point*

27 L'ouverture angulaire de la tâche de diffraction d'une onde de longueur d'onde λ par un diaphragme de taille D est de l'ordre de λ/D . Comme le capteur CCD est placé à une distance (environ) égale à f' de la lentille qui est à l'origine de la diffraction, alors la tâche de diffraction a sur le capteur une taille de l'ordre de

$$\ell_{\text{diff}} \simeq \frac{\lambda f'}{D}.$$

Dans le cas le plus pessimiste, $\lambda \simeq 1 \mu\text{m}$ et $f' = 35 \text{ mm}$, ce qui donne $\ell_{\text{diff}} = 3,5 \mu\text{m}$ et correspond à un demi pixel. La diffraction n'est donc pas limitante pour le pouvoir de résolution de la caméra, mais on est à nouveau à la limite. Cela se justifie encore par des considérations de coût : une lentille de petit diamètre est moins chère à fabriquer qu'une lentille de grand diamètre !

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt pour la formule, 1 pour le calcul, 1 pour le commentaire*

III.B - Profondeur de champ

28 Voir figure 15. Pour construire l'image de P_0 par la lentille, on considère un objet P_0B placé dans un plan de front. On construit l'image B' de B par la lentille avec les rayons particuliers habituels passant par O et par F' . On en déduit l'image C_0 par **aplanétisme**, puis on peut compléter les rayons de l'énoncé par **stigmatisme** : ils passent tous par C_0 .

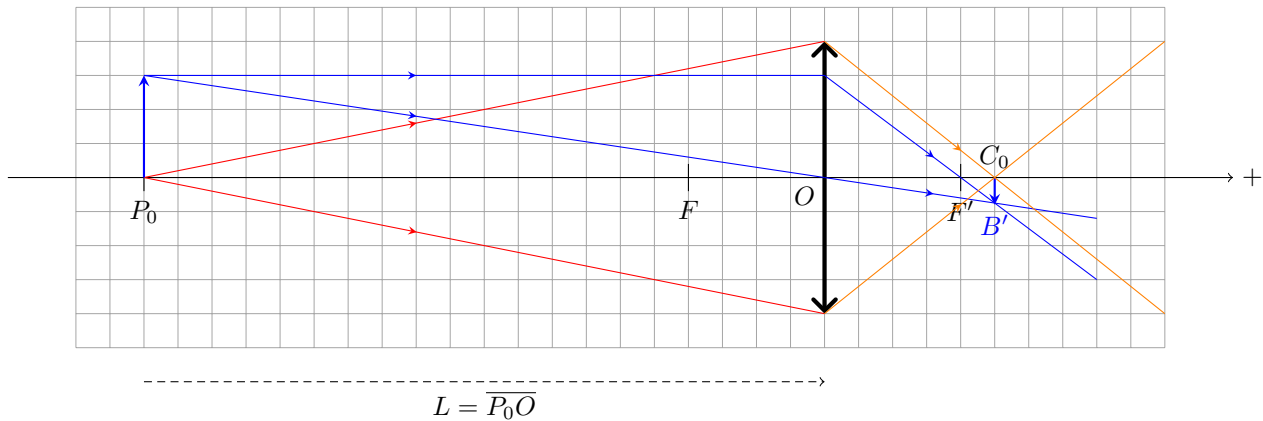


Figure 15 – Profondeur de champ, première situation. Version couleur sur le site de la classe.

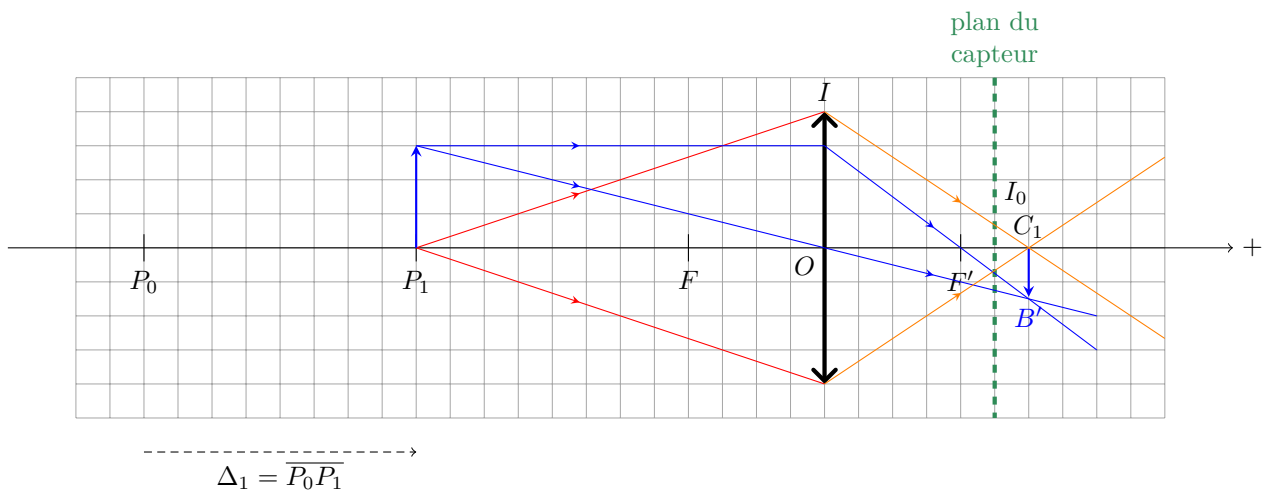


Figure 16 – Profondeur de champ, deuxième situation. Version couleur sur le site de la classe.

❖ **Barème** : 4 en tout : 1 pour la méthode, 1 pour l'image B', 0.5 pour C0, 0.5 pour le soin et les conventions, 1 pour la justification (les mots aplanétisme et stigmatisme doivent apparaître)

29 On procède de même pour construire la figure 16.

❖ **Barème** : 3 en tout : 1 pour la méthode, 1 pour l'image B', 0.5 pour C0, 0.5 pour le soin et les conventions

30 D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles IOC_1 et $I_0C_0C_1$,

$$\frac{I_0C_0}{IO} = \frac{C_1C_0}{C_1O} \quad \text{soit} \quad \frac{d_1/2}{D/2} = \frac{d_1}{D} = \frac{C_1C_0}{C_1O}.$$

De plus, on a montré à la question 21 que

$$OC_0 = \frac{f'L}{L - f'}$$

d'où on déduit

$$OC_1 = \frac{f'(L - \Delta_1)}{L - \Delta_1 - f'}$$

et ainsi

$$C_0C_1 = \frac{f'(L - \Delta_1)}{L - \Delta_1 - f'} - \frac{f'L}{L - f'} = \frac{f'(L - \Delta_1)(L - f') - f'L(L - \Delta_1 - f')}{(L - \Delta_1 - f')(L - f')}$$

En utilisant ce résultat dans le théorème de Thalès, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{D} &= \frac{f'(L - \Delta_1)(L - f') - f'L(L - \Delta_1 - f')}{(L - \Delta_1 - f')(L - f')} \times \frac{L - \Delta_1 - f'}{f'(L - \Delta_1)} \\ &= \frac{f'(L - \Delta_1)(L - f') - f'L(L - \Delta_1 - f')}{(L - f') \times f'(L - \Delta_1)} \\ &= \frac{(L - \Delta_1)(L - f') - L(L - \Delta_1 - f')}{(L - f')(L - \Delta_1)} \\ &= \frac{L^2 - Lf' - L\Delta_1 + f'\Delta_1 - L^2 + L\Delta_1 + Lf'}{(L - f')(L - \Delta_1)} \\ &= \frac{f'\Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)} \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat donné,

$$d_1 = \frac{D f' \Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)}.$$

❖ **Barème** : 5 pts : 1 pt pour Thalès, 4 pour le calcul

31 Voir figure 17. Comme le point objet n'est pas dessiné sur la figure, on s'appuie sur le rayon auxiliaire parallèle à l'un des deux rayons tracés. En interprétant ces deux rayons comme provenant d'un objet fictif à l'infini, on en déduit qu'ils se coupent dans le plan focal image de la lentille. Cela permet de tracer le prolongement d'un des deux rayons extrémaux. Pour tracer le prolongement du deuxième rayon, on utilise le stigmatisme et le fait que l'objet P_2 doit être situé sur l'axe optique. Son image se trouve donc sur l'axe optique et tous les rayons issus de P_2 s'y croisent.

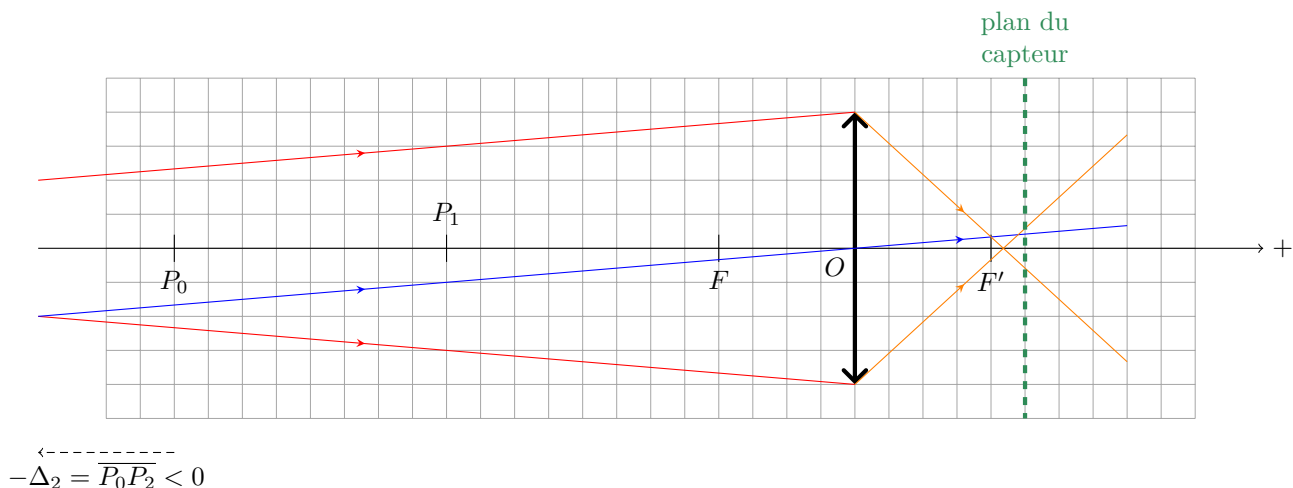


Figure 17 – Profondeur de champ, troisième situation. Version couleur sur le site de la classe.

❖ **Barème** : 4 pts : 1 pour la méthode, 1.5 pour les rayons, 0.5 pour le soin et les conventions, 1 pour la justification

32 Comme précédemment, on peut négliger f' devant L , ce qui donne

$$d_1 = \frac{D f' \Delta_1}{L(L - \Delta_1)} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{D f' \Delta_2}{L(L + \Delta_2)}.$$

⌋ Bien sûr, on ne peut rien dire sur Δ_1 et Δ_2 puisqu'on n'a pour le moment aucune idée de leurs valeurs.

❖ **Barème** : 1 point

33 Les valeurs limites sont atteintes lorsque $d_{1,2} = a$. On trouve donc

$$a = \frac{D f' \Delta_{1,\text{lim}}}{L(L - \Delta_{1,\text{lim}})} \quad \text{soit} \quad aL(L - \Delta_{1,\text{lim}}) = D f' \Delta_{1,\text{lim}} \quad \text{et} \quad aL^2 = \Delta_{1,\text{lim}}(f'D + aL)$$

ce qui amène finalement à

$$\Delta_{1,\text{lim}} = \frac{aL^2}{f'D + aL}.$$

De même,

$$a = \frac{D f' \Delta_{2,\text{lim}}}{L(L + \Delta_{2,\text{lim}})} \quad \text{soit} \quad aL(L + \Delta_{2,\text{lim}}) = D f' \Delta_{2,\text{lim}} \quad \text{et} \quad aL^2 = \Delta_{2,\text{lim}}(f'D - aL)$$

ce qui amène finalement à

$$\Delta_{2,\text{lim}} = \frac{aL^2}{f'D - aL}.$$

Numériquement, pour la caméra n° 3,

$$\Delta_{1,\text{lim}} = 2,5 \text{ m} \quad \text{et} \quad \Delta_{2,\text{lim}} = 5,8 \text{ m}.$$

❖ **Barème** : 6 points : 2 par calcul, 1 par AN

34 Comme l'image est considérée nette lorsque l'objet se trouve à une distance comprise entre $L - \Delta_{2,\text{lim}}$ et $L + \Delta_{1,\text{lim}}$ on en déduit directement

$$\Delta = \Delta_{1,\text{lim}} + \Delta_{2,\text{lim}} = \frac{aL^2}{f'D + aL} + \frac{aL^2}{f'D - aL} = aL^2 \left(\frac{f'D - aL + f'D + aL}{(f'D + aL)(f'D - aL)} \right)$$

ce qui donne finalement

$$\Delta = \frac{2aL^2 f'D}{(f'D)^2 - (aL)^2}.$$

Compte tenu des valeurs numériques, on peut faire l'approximation $(f'D)^2 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \gg (aL)^2 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ et obtenir ainsi

$$\Delta \simeq \frac{2aL^2}{f'D} = 7,1 \text{ m}.$$

La façon de calculer Δ que demande l'énoncé est un peu bizarre puisque les valeurs numériques de $\Delta_{1,\text{lim}}$ et $\Delta_{2,\text{lim}}$ ont déjà été déterminées précédemment ...

❖ **Barème** : 4 pts : 2 pts pour le calcul, 2 pts pour l'application numérique

35 On remarque que la profondeur de champ est d'autant plus grande que le diamètre de la lentille est petit. En plus des aspects discutés dans la partie précédente, choisir une lentille de petit diamètre permet ainsi de compenser l'absence de mise au point de la caméra.

❖ **Barème** : 1 point