

Transitoires électriques et mécaniques

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout autre appareil électronique est interdit.

- ▷ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entrent pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, et sauf si la question le demande explicitement, **les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte.**
- ▷ La présentation, la lisibilité et l'orthographe font partie des critères d'évaluation. Les candidats sont invités à **numéroter les copies utilisées, à encadrer les résultats de leurs calculs** et à mettre en évidence le numéro des questions. Une **pénalité pouvant aller jusqu'à 10 % de la note obtenue** sera appliquée aux copies sales et peu soignées.
- ▷ Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, **il le signale sur sa copie et poursuit sa composition** en précisant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- ▷ Le sujet se compose de **plusieurs parties indépendantes** les unes des autres, que le candidat est libre d'aborder **dans l'ordre de son choix.**
 - La partie I aborde la mécanique d'un accident automobile. Elle compte pour 45 % du barème.
 - La partie II concerne un montage électrique qui permet d'augmenter la valeur d'une tension. Elle représente 55 % du barème.
- ▷ Le sujet est volontairement long pour laisser au candidat le choix des parties sur lesquelles il souhaite se concentrer en priorité. Pour faire ce choix en connaissance de cause, il est recommandé de lire le sujet en entier avant d'entamer la composition.

Les candidats doivent vérifier que le sujet comporte bien 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

I - Déclenchement de l'airbag lors d'un accident

I.A - Mouvement du véhicule lors de la phase de freinage

Un véhicule de masse $m_0 = 1 \cdot 10^3$ kg roule à vitesse constante $V_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route plate et en ligne droite. Le conducteur voit un obstacle imprévu à une distance D devant lui et freine brusquement.

La position du centre d'inertie G du véhicule est repérée par sa coordonnée horizontale x le long d'un axe orienté dans le sens du mouvement. Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_t , supposé galiléen.

1 - Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Sous quelle condition de temps le référentiel terrestre peut-il être considéré galiléen ?

2 - Le temps de réaction t_r d'un conducteur est estimé à environ 1 s. Exprimer la distance D_r parcourue pendant cet intervalle.

Une fois qu'il a réagi, le conducteur appuie sur le frein à partir de l'instant $t = 0$. Son action génère un couple de freinage exercé sur les roues du véhicule qui les ralentit. On modélise son effet par une unique force constante $\vec{F} = -F\vec{u}_x$ avec $F = 5 \cdot 10^3$ N.

3 - En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation horaire $x(t)$ lors de la phase de freinage.

4 - En déduire le temps de freinage t_f nécessaire à ce que la voiture s'arrête puis la distance D_f parcourue lors de la phase de freinage.

5 - Exprimer et calculer numériquement la distance totale d'arrêt D_a .

I.B - Force de décélération subie par les passagers lors du choc

Malheureusement, $D < D_a$ et l'accident a lieu : le véhicule percute l'obstacle avec une vitesse d'impact V_i . Sous l'effet de la déformation du véhicule, le centre d'inertie G du véhicule se déplace d'une distance e entre le début et la fin du choc. On cherche à estimer l'intensité de la force de décélération brutale que subissent les passagers.

6 - En première approximation, cette force F_d dépend de e , V_i et de la masse m_p du passager par une relation de la forme

$$F_d = V_i^a e^b m_p^c.$$

Déterminer les exposants a , b et c par analyse dimensionnelle. En exploitant la figure 1 et/ou en proposant des valeurs numériques vraisemblables, estimer l'ordre de grandeur de F_d .

7 - En utilisant **uniquement** la figure 1, estimer la valeur maximale de F_d au cours de la collision. Comparer les deux résultats.

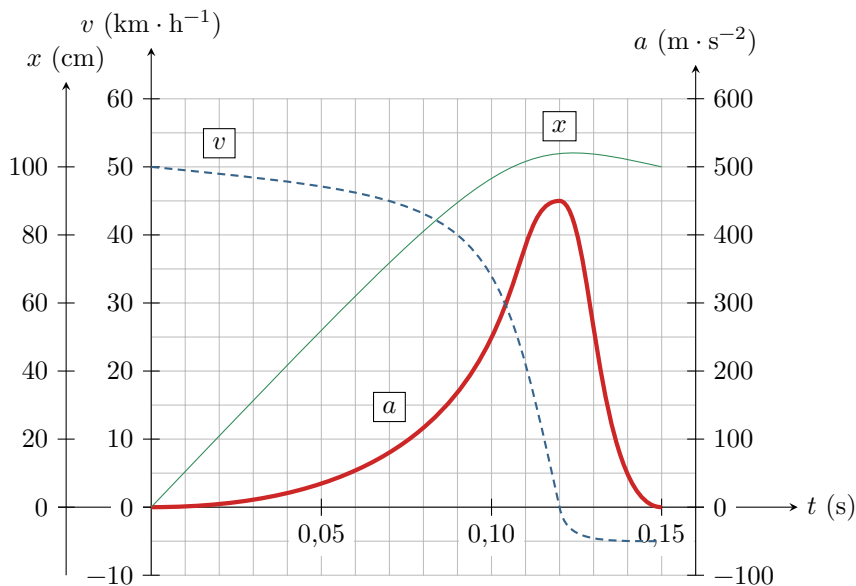


Figure 1 – Enregistrement lors d'un crash-test. Sont représentées la décélération a du centre d'inertie de la voiture, sa vitesse v , et sa position x .

I.C - Déclencheur d'airbag

Pour protéger les passagers du véhicule, ce dernier est muni d'airbags qui se déclenchent en cas d'accident. Les déclencheurs reposent sur la mesure de l'accélération du véhicule, et déclenchent l'airbag lorsqu'elle dépasse un certain seuil. Certains modèles de détecteur de choc sont constitués d'une masse mobile aimantée M retenue par un ressort, voir figure 2. Au cours d'un choc, plus la décélération est importante, plus la masse se déplace. Si le déplacement est suffisamment important, la masse aimantée met en contact électrique deux lames métalliques, ce qui déclenche l'ouverture de l'airbag.

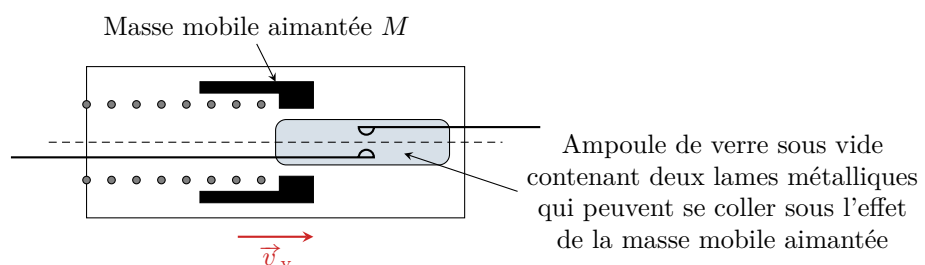


Figure 2 – Détecteur de choc. Gauche : photo du détecteur sur son circuit électrique. Droite : schéma vu en coupe, les points représentent les spires du ressort.

Le référentiel \mathcal{R}_v lié à la voiture n'est pas directement utilisable pour étudier le mouvement car il n'est pas galiléen, au contraire du référentiel terrestre \mathcal{R}_t . On introduit donc deux repères différents, voir figure 3, en translation l'un par rapport à l'autre : le premier (O', X, Y, Z) est fixe par rapport à la route, alors que le deuxième (O, x, y, z) est fixe par rapport au véhicule, donc en mouvement par rapport à la route. O' est un point de la route et O un point du véhicule.

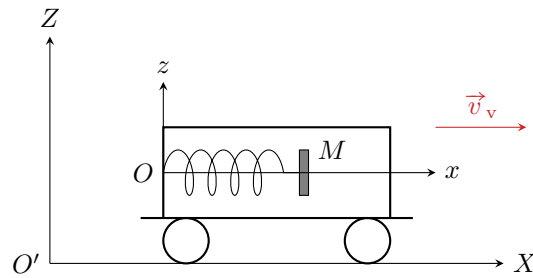


Figure 3 – Modélisation du détecteur de choc et notations utiles.

Le véhicule se déplace à la vitesse $\vec{v}_{v/\mathcal{R}_t} = v_v \vec{u}_x$ par rapport au référentiel terrestre. Il est équipé d'un système de détection de chocs dont la masse mobile M peut se déplacer suivant la direction Ox . On note m sa masse et $\vec{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x$ son vecteur position dans le référentiel \mathcal{R}_v .

Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 relie le point O et la masse mobile M qui subit lors de son déplacement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}_v}$.

Pour simplifier l'étude, on adopte un modèle de choc rudimentaire. On suppose que le véhicule roule à vitesse constante $V_0 \vec{u}_X$ jusqu'à l'instant $t = 0$ du choc : on fait donc l'hypothèse qu'il ne freine pas avant la collision, si bien que le ressort est à l'équilibre et sans vitesse à l'instant de l'impact. De plus, on fait l'hypothèse que la décélération $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{u}_x$ du véhicule par rapport à \mathcal{R}_T est constante pendant le choc et fait passer la vitesse du véhicule par rapport à \mathcal{R}_t de V_0 à 0 en une durée t_c .

8 - Exprimer a_0 en fonction de V_0 et t_c .

9 - Par dérivation du vecteur position, montrer que l'accélération de la masse mobile par rapport au référentiel terrestre s'écrit

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}_t} = -a_0 \vec{u}_x + \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x.$$

10 - En déduire l'équation du mouvement de M sous la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$$

Exprimer ω_0 , Q et x_e en fonction de m , k , ℓ_0 , α et a_0 . Nommer ω_0 et Q et préciser la signification physique de x_e .

Le système de déclenchement devant être le plus rapide possible, l'oscillateur doit fonctionner en régime pseudo-périodique.

11 - En raisonnant sur le polynôme caractéristique, montrer que ce régime n'est accessible que pour certaines valeurs de Q à préciser.

12 - En déduire que $x(t)$ peut s'écrire pour $0 \leq t < t_c$ sous la forme

$$x(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + x_e.$$

Exprimer τ et ω en fonction de ω_0 , Q et x_e .

13 - Montrer que $A = -\frac{ma_0}{k}$ et $B = \frac{A}{\tau\omega}$.

14 - Montrer que la vitesse de la masse m peut se mettre sous la forme

$$v(t) = -A \left(\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{\tau^2 \omega} \right) e^{-t/\tau} \sin(\omega t).$$

À l'instant $t = t_d > 0$, la vitesse de la masse mobile s'annule pour la première fois et le ressort est alors le plus étendu. On note d sa longueur maximale.

15 - Exprimer la longueur d en fonction de a_0 , m , k , ℓ_0 , τ et ω .

Si cette longueur devient supérieure à $3\ell_0/2$, la masse mobile aimantée se trouve alors sur le contact électrique qui déclenche l'ouverture de l'airbag.

16 - En déduire l'expression de la décélération minimale du véhicule qui déclenche l'ouverture de l'airbag en fonction de ℓ_0 , k , m et Q . L'estimer numériquement pour $m = 10 \text{ g}$, $Q = 1$ et $k = 55 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

II - Alimentation à découpage

Un hacheur est un dispositif réalisant un générateur de tension quasi-constante u réglable à partir d'un générateur de tension constante E fixée. Il utilise un système de commutation périodique dans un circuit comportant entre autres un condensateur et une bobine.

Cette partie propose d'étudier le montage particulier représenté figure 4 nommé « alimentation à découpage » ou « convertisseur boost ». Il est alimenté par une source idéale de tension constante $E > 0$, et produit une tension u quasi-constante aux bornes de la résistance de charge R . La période du système est notée T et on note α son rapport cyclique, $0 < \alpha < 1$: pour $t \in [0, \alpha T]$ l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 ouvert, puis pour $t \in [\alpha T, T]$ l'interrupteur K_1 est ouvert et l'interrupteur K_2 fermé. Le cycle se répète ensuite périodiquement.

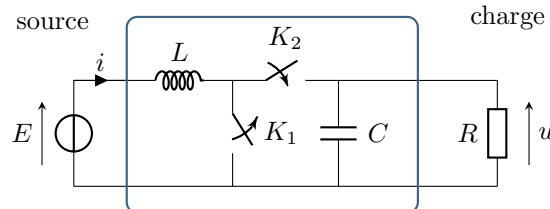


Figure 4 – Schéma général d'une alimentation à découpage. Les interrupteurs sont schématisés à l'instant $t = \alpha T$ du basculement.

II.A - Étude pendant la première phase

Étudions la première phase du cycle de fonctionnement : $0 < t < \alpha T$, K_1 est fermé, K_2 ouvert. Le circuit est équivalent à deux circuits à une maille déconnectés représentés figure 5. On étudie l'évolution du système jusqu'à l'instant $t = \alpha T$ de basculement des interrupteurs. À l'instant initial $t = 0^+$, l'intensité du courant traversant la bobine du circuit A est notée I_0 et la tension u aux bornes de la résistance et du condensateur du circuit B est notée U_0 .

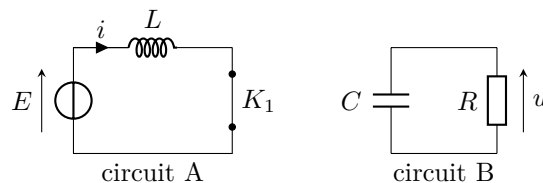


Figure 5 – Schéma équivalent à l'alimentation à découpage lors de la première phase.

Étude du circuit B

17 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans le circuit B.

18 - En déduire l'expression de $u(t)$ en fonction notamment de U_0 et d'un temps caractéristique τ à définir.

19 - Exprimer la valeur $U_1 = u(\alpha T^-)$ à la fin de la première phase.

Étude du circuit A

20 - Procéder de même pour montrer que i est une fonction affine, à exprimer en fonction notamment de I_0 , L et E .

21 - Exprimer la valeur $I_1 = i(\alpha T^-)$ à la fin de la première phase.

II.B - Étude pendant la seconde phase

À l'instant $t = \alpha T$, les interrupteurs basculent. Le circuit devient alors équivalent à celui représenté figure 6.

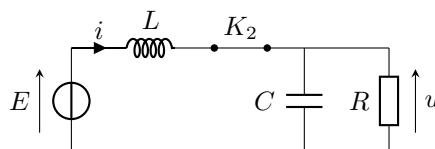


Figure 6 – Schéma équivalent à l'alimentation à découpage lors de la seconde phase.

22 - Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes de la résistance de charge. L'écrire sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 U_\infty$$

Exprimer les constantes ω_0 , Q et U_∞ en fonction des paramètres du circuit.

23 - Déterminer les valeurs de la tension u et de sa dérivée temporelle du/dt immédiatement après la commutation, en $t = \alpha T^+$. Déterminer de même les valeurs $i(\alpha T^+)$ et $\frac{di}{dt}(\alpha T^+)$. Les exprimer notamment en fonction de U_1 et I_1 .

24 - Exprimer deux conditions portant sur I_1 , U_1 et les paramètres du circuit qui permettent d'avoir simultanément

$$\frac{di}{dt}(\alpha T^+) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(\alpha T^+) > 0.$$

On suppose ces conditions vérifiées dans toute la suite du problème.

On admet que l'intensité i vérifie une équation différentielle de la même forme que u , avec les mêmes paramètres ω_0 et Q ,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 I_\infty.$$

25 - Sans établir l'équation différentielle ci-dessus mais en expliquant clairement votre raisonnement, déterminer l'expression de I_∞ .

26 - Parmi les différents chronogrammes représentés figure 7 pour $Q = 10$, identifier celui qui correspond à l'intensité $i(t)$ traversant la bobine. Expliquer pour chaque courbe incorrecte pourquoi elle ne convient pas.

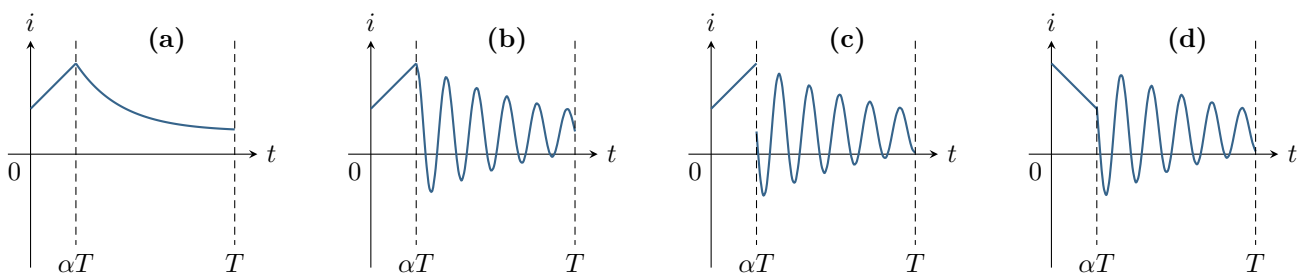


Figure 7 – Chronogrammes pouvant correspondre à l'intensité $i(t)$ au cours d'une période.

II.C - Linéarisation des expressions

Pour que la tension u soit quasi-constante, l'alimentation à découpage est utilisée dans un régime où la période T de commutation est très inférieure aux échelles de temps caractéristiques des circuits. On peut alors utiliser des approximations linéaires de u et de i (développements limités du premier ordre) durant chaque phase sous la forme

$$u(t) \simeq u(t_0) + (t - t_0) \frac{du}{dt}(t_0) \quad \text{et} \quad i(t) \simeq i(t_0) + (t - t_0) \frac{di}{dt}(t_0),$$

avec t_0 un instant bien choisi. Graphiquement, cela revient à approximer les courbes par leurs tangentes : les transitoires réels n'ont donc pas l'allure de la figure 7.

27 - Au cours de la phase 1, donc pour $t \in [0, \alpha T]$, exprimer la tension u sous la forme

$$u(t) = U_0 + \beta t$$

avec β une constante à exprimer notamment en fonction de U_0 .

28 - En utilisant les résultats de la question 23, exprimer au cours de la phase 2, donc pour $t \in [\alpha T, T]$, l'intensité i et la tension u sous la forme

$$i(t) = I_1 + \gamma_i(t - \alpha T) \quad \text{et} \quad u(t) = U_1 + \gamma_u(t - \alpha T).$$

Exprimer les constantes γ_i et γ_u en fonction de I_1 et U_1 notamment.

II.D - Régime de fonctionnement périodique

On suppose pour toute la suite qu'un régime périodique de période T est établi.

29 - Que doit valoir $i(T)$? En déduire que $U_1 = \frac{E}{1 - \alpha}$.

30 - En déduire l'expression de U_0 en fonction de E , α et du quotient T/τ .

31 - Calculer le taux d'ondulation défini par $\Delta U = (U_0 - U_1)/U_0$.

32 - Conclure : justifier qu'il est possible de réaliser une source de tension quasi-continue qui élève la tension de la source E .

II.E - Analyse énergétique

On rappelle que le montage est supposé avoir un fonctionnement périodique de période T .

33 - Exprimer l'énergie électrique W_{L1} reçue par la bobine sur l'intervalle $[0, \alpha T]$ et l'énergie W_{L2} qu'elle reçoit pendant l'intervalle $[\alpha T, T]$ en fonction notamment de I_0 et I_1 . Que vaut la somme $W_{L1} + W_{L2}$ quand le régime périodique est établi?

34 - Que vaut la somme $W_{C1} + W_{C2}$ des énergies électriques reçues par le condensateur dans les mêmes conditions?

35 - Pour gagner un point gratuit, dessiner un smiley sur votre copie.

36 - En déduire une relation entre l'énergie électrique \mathcal{E}_g fournie par le générateur et l'énergie électrique W_R reçue par la charge résistive pendant une période.

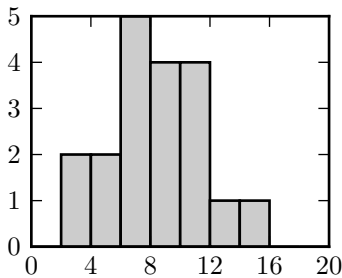
37 - En déduire l'énergie W_R transmise à la charge au cours d'une période en fonction de E , T et de la valeur moyenne I_{moy} de l'intensité i . On rappelle que la valeur moyenne Y_{moy} d'une grandeur périodique $y(t)$ est donnée par

$$Y_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Transitoires électriques et mécaniques

Bilan du devoir

Notes



- ▷ Barème brut sur 96, transformé en note sur 20 par proportionnalité.
- ▷ Moyenne de la classe : 25/90, arbitrairement choisie à 8,5/20 car j'estime le devoir décevant.
- ▷ Les notes sont raisonnablement étalées, comprises entre 3,0 et 15,6/20 (46/96) mais même cette meilleure copie contient des erreurs qui ne devraient pas s'y trouver.

Commentaires principaux

- ▷ La partie I était proche du cours et a été dans l'ensemble à peu près bien traitée. Les habituels points noirs se retrouvent : énoncé mal lu, rédaction hasardeuse qui entraîne des erreurs, et non respect des notations de l'énoncé.
- ▷ En revanche, la partie II est désastreuse. Trop peu de questions sont traitées, et celles qui le sont contiennent beaucoup d'erreurs qui ne devraient plus être : notations pas définies, confusion dans les conventions, dans les formes de solution. Le bilan est donc clairement mauvais.
- ▷ Les mauvais résultats sur la partie II s'expliquent aussi probablement par trop de lenteur sur la partie de mécanique, et donc trop peu de temps consacré à l'électronique.
- ▷ Il est rappelé une nouvelle fois à la lecture de vos copies que presque toutes les erreurs de calcul sont précédées d'une erreur (ou d'une absence) de notation ou de rédaction. C'est critique en électronique. En particulier, aucun de ceux qui se dispensent de schéma ne mène les calculs au bout.

Erreurs trop courantes à éviter

- 2** - Le respect des notations de l'énoncé est essentiel dans une question aussi simple et aussi tôt dans le sujet.
- 4** - Vous ne pouvez pas laisser une expression inaboutie de D_f avec deux termes qui se ressemblent beaucoup. Il faut la simplifier.
- 6** - La dimension d'une force à partir des dimensions de base n'est pas à connaître. Il faut la redémontrer systématiquement.
- 10** - Beaucoup de réponses incomplètes à cette question, pour des choses que vous savez probablement. Lisez les questions jusqu'au bout !!
- 12** - Attention, comme $\Delta < 0$ c'est $\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{-\Delta}$ qui intervient.
- 17** - Circuit on ne peut plus basique, mais beaucoup orientent le condensateur en convention générateur sans s'en rendre compte.
- 18** - Une rédaction minimale est nécessaire.
- 22** - Bizarrement, cette question dénote par le fait qu'elle a été plutôt bien traitée.
- 33 et 34** - Même en fin de sujet il y a des points faciles à gagner !
- 35** - Huit étudiants seulement lisent le sujet jusqu'au bout ... Sans commentaire.

I - Déclenchement de l'airbag lors d'un accident

❖ *Barème : 45 pts au total*

I.A - Mouvement du véhicule lors de la phase de freinage

1 Un référentiel est dit galiléen si un point matériel (pseudo)-isolé y a un mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel terrestre est galiléen sur des durées très inférieures à 24 h, période de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

❖ *Barème : 2 pts*

2 Le mouvement est rectiligne uniforme pendant la phase de réaction, donc

$$D_r = V_0 t_r = 20 \text{ m}.$$

❖ *Barème : 1 pt*

3 ▷ Système : véhicule, modélisé par un point matériel de masse m_0 situé en G ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :

→ le poids du véhicule est compensé par la réaction de la route ;

→ force de freinage \vec{F} .

▷ D'après le PFD, avec \vec{p}_0 la quantité de mouvement du véhicule,

$$\left. \frac{d\vec{p}_0}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \vec{F}$$

et comme $\frac{d\vec{p}_0}{dt} = m_0 \ddot{x} \vec{u}_x$ alors en projetant on obtient

$$m_0 \ddot{x} = -F \quad \text{soit} \quad \ddot{x} = -\frac{F}{m_0}.$$

▷ On intègre une première fois pour trouver la vitesse,

$$v_x = -\frac{F}{m_0} t + A \quad \text{avec} \quad A \text{ constante.}$$

La voiture roule à la vitesse V_0 jusqu'à l'instant t_r , donc

$$v_x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} V_0$$

d'où finalement

$$v_x(t) = -\frac{F}{m_0} t + V_0.$$

▷ On intègre une seconde fois pour trouver la position,

$$x = -\frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2 + V_0 t + B \quad \text{avec} \quad B \text{ constante.}$$

En supposant que la voiture se trouve initialement en $x = 0$,

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

et finalement

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2 + V_0 t.$$

❖ *Barème : 5 pts : 2 pts pour la démarche et la rédaction, 0.5 pt pour l'accélération, 1 pt pour la vitesse, 1.5 pt pour la position*

4 La voiture est arrêtée lorsque sa vitesse est nulle, donc

$$-\frac{F}{m_0} t_f + V_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad t_f = \frac{m_0 V_0}{F}.$$

On en déduit

$$D_f = x(t_f) = -\frac{1}{2} \frac{F}{m_0} \left(\frac{m_0 V_0}{F} \right)^2 + V_0 \frac{m_0 V_0}{4} \omega_0^2 F = -\frac{m_0 V_0^2}{2F} + \frac{m_0 V_0^2}{F}$$

soit finalement

$$D_f = \frac{m_0 V_0^2}{2F}.$$

❖ *Barème : 3 pts : 1 + 2*

5 La vitesse V_0 est de l'ordre de $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi,

$$D_a = D_r + D_f = V_0 t_r + \frac{m_0 V_0^2}{2F} \simeq 60 \text{ m}.$$

❖ *Barème : 2 pts : 0.5 littéral + 1.5 pour l'AN.*

I.B - Force de décélération subie par les passagers lors du choc

6 En utilisant par exemple l'expression du poids, on trouve la dimension d'une force :

$$[F_d] = [m][g] = M L T^{-2}$$

car g s'exprime en m/s^2 . On en déduit l'équation aux dimensions

$$M L T^{-2} = L^a T^{-a} \times L^b \times M^c.$$

Comme la relation est homogène, on identifie les exposants :

$$\begin{cases} 1 = c & \text{(masse)} \\ 1 = a + b & \text{(longueur)} \\ -2 = -a & \text{(temps)} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 - a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

et finalement

$$F_d = \frac{V_i^2 m_p}{e}$$

On lit sur la figure 1 $V_i = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \simeq 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $e \simeq 1 \text{ m}$ donc pour un passager de masse $m_p = 70 \text{ kg}$

$$F_d \simeq 1,4 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

❖ *Barème : 5 pts : 1 pt pour la dimension force, 1 pt pour le système, 1 pt pour la résolution et la conclusion, 2 pts pour l'application numérique.*

7 Le passager subit au plus une accélération $a_{\max} = 450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui donne

$$F_{d,\max} = m_p a_{\max} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

L'approche dimensionnelle donne le bon ordre de grandeur, mais est peu précise. La principale différence vient du fait que l'accélération varie lors d'une vraie collision.

❖ *Barème : 2 pts*

I.C - Déclencheur d'airbag

8 L'accélération est constante lorsque la vitesse passe de V_0 à 0 pendant la durée t_c , donc

$$a_0 = \frac{V_0 - 0}{t_c} \quad \text{donc} \quad a_0 = \frac{V_0}{t_c}.$$

❖ *Barème : 1 pt*

9 D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}.$$

En dérivant deux fois dans le référentiel terrestre,

$$\left. \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_t} = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{O'O}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_t} + \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_t}$$

Or le point O est lié à la voiture, donc son accélération est $-a_0 \vec{u}_x$, et $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x$ avec \vec{u}_x constant, d'où

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}_t} = -a_0 \vec{u}_x + \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x.}$$

La composition des accélérations dans deux référentiels en translation est au programme de SI, mais pas de physique. Il s'agit juste ici de la démontrer dans le cas particulier de l'exercice.

❖ **Barème : 2 pts si bien justifié**

10 ▷ Système : masse aimantée, modélisée par un point matériel de masse m ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :

→ poids compensé par la réaction du support car le mouvement est horizontal ;

→ force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_s = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x$;

→ force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}_{M/\mathcal{R}_v} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$.

▷ D'après le PFD,

$$\left. \frac{d\vec{p}_{M/\mathcal{R}_t}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \vec{F}_r + \vec{f}$$

soit en projetant

$$-ma_0 + m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - \ell_0) - \alpha \frac{dx}{dt}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\omega_0/Q} \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} \underbrace{\left(\ell_0 + \frac{ma_0}{k} \right)}_{x_e}.}$$

Ainsi

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \quad x_e = \ell_0 + \frac{ma_0}{k}.}$$

ω_0 est la **pulsation propre**, Q le **facteur de qualité** et x_e est la **position d'équilibre apparente** au cours du choc.

❖ **Barème : 5 pts : 1 pt pour la démarche et la rédaction, 1 pt pour l'équation brute, 3 pts pour l'identification des paramètres et leur signification.**

11 Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0.$$

Le régime est pseudo-périodique si son discriminant est négatif, c'est-à-dire si

$$\frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{Q^2} < 4 \quad \text{donc} \quad \boxed{Q > \frac{1}{2}}.$$

❖ **Barème : 2 pts**

12 **Solutions homogènes x_H** : les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

ce qu'on identifie avec la forme de solution donnée

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Les solutions homogènes s'écrivent donc

$$x_H(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] .$$

Solution particulière x_P : constante car le second membre est constant, donc en injectant dans l'équation différentielle,

$$0 + 0 + \omega_0^2 x_P = \omega_0^2 x_e \quad \text{d'où} \quad x_P = x_e .$$

Conclusion :

$$x(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + x_e .$$

❖ **Barème : 3 pts : 2 pts pour les racines et l'identification de ω et τ + 1 pt pour x_e**

13 L'énoncé indique qu'à l'instant de l'impact le ressort est à l'équilibre et sans vitesse, c'est-à-dire

$$x(0) = \ell_0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 .$$

Attention, $x(0) \neq x_e$: x_e est la position d'équilibre apparente lors de la phase de freinage, mais pas avant.

Condition initiale sur la position :

$$x(0) \underset{\text{sol}}{=} A + x_e \underset{\text{CI}}{=} \ell_0 \quad \text{donc} \quad A = \ell_0 - x_e \quad \text{soit} \quad \boxed{A = -\frac{ma_0}{k}}$$

Condition initiale sur la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + e^{-t/\tau} [-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)]$$

Ainsi, à $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt}(0) \underset{\text{sol}}{=} -\frac{A}{\tau} + \omega B \underset{\text{CI}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{B = \frac{A}{\omega\tau}}$$

❖ **Barème : 4 pts : 1 pt pour les CI, 1 pt pour A et 2 pts pour B .**

14 On réinjecte l'expression de B dans celle de $v = dx/dt$,

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \left[A \cos(\omega t) + \frac{A}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right] + e^{-t/\tau} \left[-\omega A \sin(\omega t) + \omega \frac{A}{\omega\tau} \cos(\omega t) \right] \\ &= -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} \cos(\omega t) - \frac{A}{\omega\tau^2} e^{-t/\tau} \sin(\omega t) - A\omega e^{-t/\tau} \sin(\omega t) + \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} \cos(\omega t) \\ &= \frac{A}{\omega\tau^2} e^{-t/\tau} \sin(\omega t) - A \frac{\tau^2 \omega^2}{\omega\tau^2} e^{-t/\tau} \sin(\omega t) \\ &= -A \left(\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{\tau^2 \omega} \right) e^{-t/\tau} \sin(\omega t) . \end{aligned}$$

❖ **Barème : 3 pts**

15 La vitesse s'annule pour la première fois à l'instant t_d tel que

$$\sin(\omega t_d) = 0 \quad \text{soit} \quad \omega t_d = \pi \quad \text{donc} \quad t_d = \frac{\pi}{\omega}$$

car t_d est le *plus petit* de ces instants. La longueur du ressort vaut alors

$$d = x(t_d) = A e^{-t_d/\tau} \cos(\omega t_d) + x_e = -A e^{-\pi/\omega\tau} + x_e .$$

En utilisant les expressions de A et de x_e ,

$$d = -\frac{ma_0}{k} e^{-\pi/\omega\tau} + \ell_0 + \frac{ma_0}{k} \quad \text{d'où} \quad \boxed{d = \ell_0 + \frac{ma_0}{k} \left(1 - e^{-\pi/\omega\tau} \right) .}$$

❖ **Barème** : 3 pts : 1 pour t_d et 2 pour d .

16 Pour qu'il y ait déclenchement de l'airbag,

$$d > \frac{3}{2}\ell_0$$

$$\ell_0 + \frac{ma_0}{k} (1 - e^{-\pi/\omega\tau}) > \frac{3}{2}\ell_0$$

$$\frac{ma_0}{k} (1 - e^{-\pi/\omega\tau}) > \frac{\ell_0}{2}$$

$$a_0 > \frac{k\ell_0}{2m(1 - e^{-\pi/\omega\tau})}$$

❖ **Barème** : 2 pts

II - Alimentation à découpage

❖ **Barème** : 54 pts au total

II.A - Étude pendant la première phase

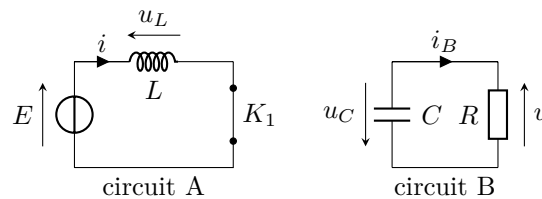


Figure 8 – Schéma équivalent au hacheur lors de la première phase.

Étude du circuit B

17 Notations : voir la figure 8.

Loi des mailles :

$$u + u_C = 0$$

Dérivation :

$$\frac{du}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

Loi de comportement :

$$\frac{du}{dt} + \frac{i_B}{C} = 0$$

Loi d'Ohm :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = 0$$

Forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$$

avec $\tau = RC$.

❖ **Barème** : 2 pts

18 **Forme générale des solutions** : l'équation est homogène, donc solution particulière nulle, donc

$$u(t) = A e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad A \text{ constante.}$$

Détermination de A : l'énoncé indique $u(0^+) = U_0$, d'où

$$u(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} U_0.$$

Conclusion :

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

❖ *Barème : 2 pts : 1 pt pour la démarche, 1 pt pour le calcul*

19 On a directement

$$U_1 = U_0 e^{-\alpha T / \tau}.$$

❖ *Barème : 1 pt*

Étude du circuit A

20 Équation différentielle vérifiée par i : notations de la figure 8.

Loi des mailles : $u_L = E$

Loi de comportement : $L \frac{di}{dt} = E$

Conclusion : $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}.$

Intégration :

$$i(t) = \frac{E}{L}t + B \quad \text{avec} \quad B \text{ constante.}$$

Détermination B : l'énoncé indique $i(0^+) = I_0$ d'où

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} I_0.$$

Conclusion :

$$i(t) = \frac{E}{L}t + I_0.$$

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt pour l'éq diff, 1 pour l'intégration, 1 pour la conclusion.*

21 Directement,

$$I_1 = \frac{\alpha ET}{L} + I_0.$$

❖ *Barème : 1 pt*

II.B - Étude pendant la seconde phase

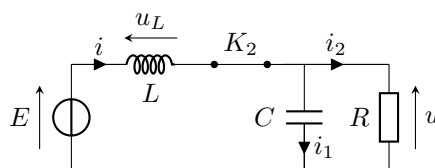


Figure 9 – Schéma équivalent au hacheur lors de la seconde phase.

22 Notations : voir figure 9

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

Lois de comportement R et C : $i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$

Dérivation : $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$

Loi de comportement L : $\frac{u_L}{L} = C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$

Loi des mailles : $\frac{E}{L} - \frac{u}{L} = C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC}.$$

Identification avec la forme de l'énoncé :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad U_\infty = E$$

d'où également

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \quad \text{soit} \quad Q = RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} \quad \text{d'où} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Noter que le facteur de qualité de ce circuit est l'inverse du RLC série. Pour le comprendre qualitativement, constater que le circuit devient un oscillateur harmonique (circuit LC) dans la limite $R \rightarrow \infty$, alors que si $R \rightarrow 0$ le condensateur est court-circuité.

❖ **Barème** : 6 pts : 4 pts pour l'équation, 2 pour l'identification.

23 Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, et en utilisant la question 23,

$$u(\alpha T^+) = u(\alpha T^-) = U_1.$$

De même, par continuité de l'intensité dans une bobine et grâce à la même question,

$$i(\alpha T^+) = i(\alpha T^-) = I_1.$$

Cherchons maintenant $\frac{du}{dt}(\alpha T^+)$, en raisonnant avec les notations de la figure 9.

Loi des nœuds

$$i = i_1 + i_2$$

Lois de comportement

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}$$

donc à $t = \alpha T^+$

$$I_1 = C \frac{du}{dt}(\alpha T^+) + \frac{U_1}{R}$$

et finalement

$$\frac{du}{dt}(\alpha T^+) = \frac{I_1}{C} - \frac{U_1}{RC}.$$

Cherchons enfin $\frac{di}{dt}(\alpha T^+)$, toujours avec les notations de la figure 9.

Loi des mailles

$$E = u + u_L$$

Loi de comportement

$$E = u + L \frac{di}{dt}$$

donc à $t = \alpha T^+$

$$E = U_1 + L \frac{di}{dt}(\alpha T^+)$$

et finalement

$$\frac{di}{dt}(\alpha T^+) = \frac{E}{L} - \frac{U_1}{L}.$$

❖ **Barème** : 7 pts : 1 pour i , 1 pour u , 2 pour $\frac{du}{dt}$, 2 pour $\frac{di}{dt}$, 1 pt pour la rédaction et les justifications. **Points sur les dérivées réduits à 1 chacun compte tenu de l'aide apportée.**

24 Pour avoir $\frac{di}{dt}(\alpha T^+) < 0$ il faut avoir

$$U_1 > E,$$

et pour que $\frac{du}{dt}(\alpha T^+) > 0$ simultanément il faut

$$\frac{I_1}{C} > \frac{U_1}{RC} \quad \text{soit} \quad I_1 > \frac{U_1}{R}.$$

❖ **Barème** : 2 pts

25 On constate que I_∞ est une solution particulière constante de l'équation différentielle donnée. Elle correspond donc à la valeur atteinte en régime permanent continu, que l'on détermine en raisonnant sur le circuit équivalent figure 10. Ainsi,

$$E = u = RI_\infty \quad \text{d'où} \quad I_\infty = \frac{E}{R}.$$

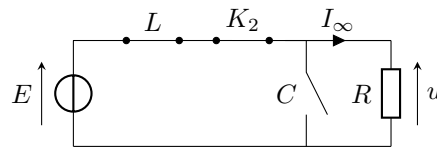


Figure 10 – Schéma équivalent au hacheur en régime permanent continu.

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt pour la méthode justifiée, 2 pts pour le calcul.*

- 26 ▷ Le chronogramme (a) ne convient pas car il ne présente pas d'oscillations, alors que $Q = 10 > 1/2$;
 ▷ Le chronogramme (c) ne convient pas d'une part car i est discontinue ;
 ▷ Le chronogramme (d) ne convient pas car la pente de i lors de la première phase est négative alors qu'elle devrait être positive d'après la question 20 ;
 ▷ C'est donc **le chronogramme (b) qui convient.**

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt par chronogramme ne convenant pas.*

II.C - Linéarisation des expressions

- 27 Appliquons le développement limité pour la première phase, en prenant $t_0 = 0$. La dérivée s'écrit

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\tau} U_0 e^{-t/\tau},$$

donc

$$u(t) = u(0^+) + \frac{du}{dt}(0^+) \times (t - 0) = U_0 - \frac{U_0}{\tau} e^{-0t} \quad \text{soit} \quad \boxed{u(t) = U_0 - \underbrace{\frac{U_0}{\tau}}_{\beta} t}$$

❖ *Barème : 2 pts : 1 pour la dérivée, 1 pour l'application du DL.*

- 28 Appliquons les développements limités pour la deuxième phase, en prenant $t_0 = \alpha T$.

$$i(t) = i(\alpha T) + \frac{di}{dt}(\alpha T^+) \times (t - \alpha T) \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) = I_1 + \underbrace{\frac{1}{L}(E - U_1)}_{\gamma_i} (t - \alpha T)}.$$

De même,

$$u(t) = u(\alpha T) + \frac{du}{dt}(\alpha T^+) \times (t - \alpha T) \quad \text{soit} \quad \boxed{u(t) = U_1 + \underbrace{\frac{1}{C} \left(I_1 - \frac{U_1}{R} \right)}_{\gamma_u} (t - \alpha T)}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

II.D - Régime de fonctionnement périodique

- 29 Pour que le fonctionnement soit périodique, il faut que

$$\boxed{i(T) = I_0}.$$

Ainsi, en appliquant le résultat que la question 28 en $t = T$ on obtient

$$I_0 = I_1 + \frac{1}{L}(E - U_1)(1 - \alpha)T.$$

Or d'après la question 21

$$I_1 = \frac{\alpha ET}{L} + I_0 \quad \text{soit} \quad I_0 = I_1 - \frac{\alpha ET}{L}.$$

Par identification,

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}(E - U_1)(1 - \alpha)T &= -\frac{\alpha ET}{L} \\ (E - U_1)(1 - \alpha) &= -\alpha E \\ E - \alpha E - U_1(1 - \alpha) &= -\alpha E \\ \boxed{U_1 = \frac{E}{1 - \alpha}}.\end{aligned}$$

❖ **Barème : 4 pts : 1 pt pour la périodicité, 3 pts pour le calcul de U_1 .**

30 D'après la question 27 appliquée en $t = \alpha T$,

$$U_1 = U_0 \left(1 - \frac{\alpha T}{\tau}\right) \quad \text{d'où} \quad \frac{E}{1 - \alpha} = U_0 \left(1 - \frac{\alpha T}{\tau}\right)$$

et finalement

$$\boxed{U_0 = \frac{E}{(1 - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha T}{\tau}\right)}}.$$

❖ **Barème : 2 pts**

31 Le taux d'ondulation se réécrit

$$\Delta U = \frac{U_0 - U_1}{U_0} = 1 - \frac{U_1}{U_0}$$

Or d'après la question précédente,

$$\frac{U_1}{U_0} = 1 - \frac{\alpha T}{\tau}$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta U = \frac{\alpha T}{\tau}}.$$

❖ **Barème : 2 pts**

32 Comme $T \ll \tau$ et $0 < \alpha < 1$, on en déduit que le taux d'ondulation est très faible : la tension u peut être approximée comme quasiment constante tout au long d'une période. D'après la question 29, on a donc tout au long de la période

$$u \simeq U_1 = \frac{E}{1 - \alpha} > E$$

compte tenu des valeurs accessibles à α . Le montage produit bien une tension quasi-constante supérieure à E .

❖ **Barème : 2 pts, les deux aspects de la question doivent être justifiés rigoureusement.**

II.E - Analyse énergétique

33 L'énergie électrique emmagasinée dans la bobine s'écrit $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$. Ainsi, au cours de la première phase,

$$W_{L1} = \frac{1}{2}Li(\alpha T)^2 - \frac{1}{2}Li(0)^2 = \frac{1}{2}L(I_1^2 - I_0^2)$$

De même, au cours de la deuxième phase,

$$W_{L2} = \frac{1}{2}Li(T)^2 - \frac{1}{2}Li(\alpha T)^2 = \frac{1}{2}L(I_0^2 - I_1^2)$$

compte tenu de l'hypothèse de fonctionnement périodique. Ces deux énergies sont opposées, d'où

$$\boxed{W_{L1} + W_{L2} = 0}.$$

❖ **Barème : 3 pts**

34 L'énergie emmagasinée par le condensateur s'écrit $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$. En régime périodique on a également $u(T) = u(0)$, donc au total sur une période

$$\boxed{W_{C1} + W_{C2} = 0}.$$

❖ *Barème : 1 pt*

35 Qui lit l'énoncé jusqu'au bout ? :)

❖ *Barème : 1 pt*

36 Au cours d'une période, l'énergie fournie par le générateur se répartit entre les trois dipôles du circuit, d'où

$$\mathcal{E}_g = W_C + W_L + W_R \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_g = W_R.}$$

❖ *Barème : 1 pt*

37 Comme le générateur est parcouru par l'intensité i , alors il fournit la puissance

$$\mathcal{P}_g = Ei(t)$$

et ainsi en intégrant sur une période on obtient

$$W_R = \mathcal{E}_g = \int_0^T Ei(t) dt = E \times \frac{T}{T} \int_0^T i(t) dt,$$

d'où finalement

$$\boxed{W_R = E I_{\text{moy}} T.}$$

❖ *Barème : 3 pts*