BLAISE PASCAL
PT 2023-2024

**Préparation à l'oral**

# Mécanique des fluides

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

*Flasher ce code pour accéder aux corrigés*

## Statique des fluides

### Exercice 1 : Oscillations d'un ballon gonflé à l'hélium — oral banque PT | 2 | 3 |

- *Modèle de l'atmosphère isotherme ;*
- *Poussée d'Archimède ;*
- *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*

Considérons un ballon fermé, de volume constant $V_0$, gonflé à l'hélium sous la pression $2P_0$, $P_0$ étant la pression atmosphérique au niveau du sol. Le ballon baigne dans l'atmosphère, supposée isotherme à la température $T_0 = 293\,\mathrm{K}$. On néglige la masse de l'enveloppe du ballon. L'hélium et l'air sont assimilés à des gaz parfaits. L'axe $(Oz)$ est vertical ascendant.

*Données :* $M_{\mathrm{He}} = 4\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ ; $M_{\mathrm{N}} = 14\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ ; $M_{\mathrm{O}} = 16\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

**1 -** Rappeler la composition de l'air et déterminer sa masse molaire [1].

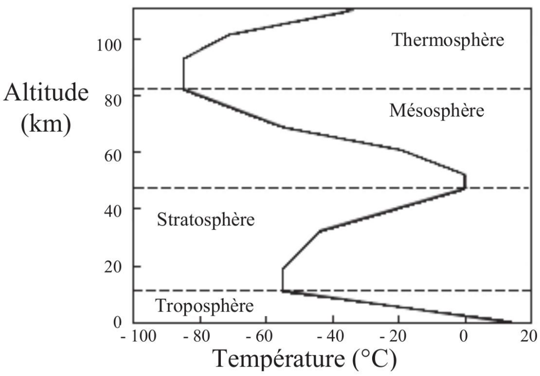
**2 -** Déterminer la pression $P(z)$ dans l'atmosphère et exprimer une longueur caractéristique $H$ du phénomène en fonction des données.

**3 -** Montrer que le ballon monte jusqu'à une altitude $z_{\text{éq}}$ à exprimer en fonction des données.

**4 -** Montrer qualitativement que le ballon va alors osciller autour de cette position. Déterminer la période $T$ des oscillations de faible amplitude en fonction de l'accélération de la pesanteur $g$ et de $H$.

### Exercice 2 : Atmosphère adiabatique et polytropique — 3 | 3

- *Relation de la statique des fluides dans un gaz ;*
- *Loi de Laplace.*




Cet exercice propose d'envisager d'autres modèles d'atmosphère que celui de l'atmosphère isotherme, qui ne permet évidemment pas d'expliquer les variations de températures observées, récapitulées sur la courbe ci-contre. On se limitera à la troposphère, c'est-à-dire la couche occupant les douze premiers kilomètres de l'atmosphère en partant de la surface de la Terre, dans laquelle la température varie linéairement. Le gradient de température est défini par

$$\delta = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \text{cte}\,.$$

On rappelle que l'indice adiabatique $\gamma$ de l'air modélisé comme un gaz parfait diatomique est égal à $7/5$. Sa masse molaire vaut $29{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

1. La question n'était pas présente dans ce sujet en particulier, où $M_{\mathrm{air}}$ était donnée ... mais je l'ai déjà vue à de nombreuses reprises, et ne pas savoir y répondre serait vraiment la honte ☺

**1 -** Déterminer le champ de pression dans l'atmosphère en fonction de $\delta$.

**2 -** À partir de la figure, donner la valeur de la température au sommet de la troposphère à 12 km d'altitude ainsi que celle du gradient de température réel $\delta_{\text{réel}}$.

On souhaite interpréter la valeur de $\delta$ par une approche thermodynamique, en identifiant une quantité conservée, c'est-à-dire indépendante de $z$. Supposons pour commencer que l'air dans l'atmosphère évolue de manière adiabatique réversible.

**3 -** Déterminer deux exposants $x$ et $y$ tels que le produit $T^x P^y$ soit constant.

**4 -** En déduire la relation donnant $\mathrm{d}T/T$ en fonction de $\mathrm{d}P/P$ et $\gamma$.

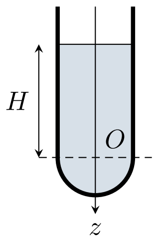
**5 -** Établir l'expression du gradient de température adiabatique $\delta_{\text{adiab}}$ en fonction de $\gamma$, $M_{\text{air}}$, $g$ et $R$. Donner sa valeur pour l'air. Commenter la qualité du modèle, à comparer notamment au modèle d'atmosphère isotherme.

Compte tenu de la discussion précédente, on adapte légèrement la modélisation, en notant $T^q P^{1-q}$ la quantité qui demeure indépendante de $z$, avec $q$ un exposant supérieur à 1 appelé indice polytropique.

**6 -** Relier le gradient de température à $q$. Déterminer $q$ à partir des données expérimentales.

## Exercice 3 : Force de pression sur un tube à essais — oral banque PT | 2 | 2 |

- *Relation de l'hydrostatique ;*
- *Résultante des forces de pression ;*
- *Intégration par découpage mésoscopique.*

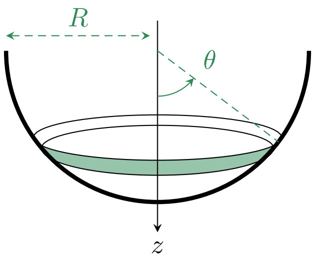



On considère un tube à essais rempli d'un liquide incompressible de masse volumique $\rho$. On raisonne sur un axe vertical $z$ descendant dont l'origine se trouve comme indiqué sur le schéma ci-contre.

**1 -** Calculer la pression $P(z)$.

**2 -** Donner sans calcul la direction de la résultante des forces de pression subies par le tube.

**3 -** Faire le calcul. Commenter.

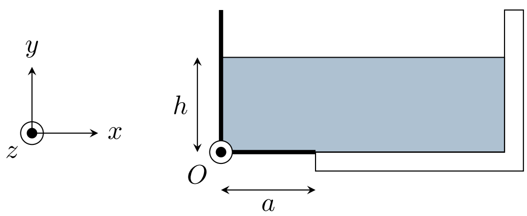



*Données :*
- Aire d'une couronne sphérique élémentaire (ci-contre) : $\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$
- Aides au calcul :

$$\int \cos\theta \,\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \text{cte}$$
$$\int \cos^2\theta \,\sin\theta \,\mathrm{d}\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3} + \text{cte}$$

## Exercice 4 : Plaque pivotante — oral banque PT | 3 | 2

- *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*
- *Résultante des forces de pression.*
- *Moment cinétique.*




Les deux parois du récipient ci-contre dessinées en traits épais sont rigidement liées et peuvent pivoter sans frottement autour de l'axe $(Oz)$. Le récipient est parallélépipédique et possède une longueur $b$ dans la direction $(Oz)$. On note $P_0$ la pression dans l'air environnant et $\vec{g} = -g\,\vec{e}_y$.

**1 -** Exprimer la pression dans l'eau.

**2 -** La pression sur la plaque horizontale est-elle uniforme ? Exprimer la résultante des forces de pression sur la plaque horizontale et le moment résultant autour de $z$.

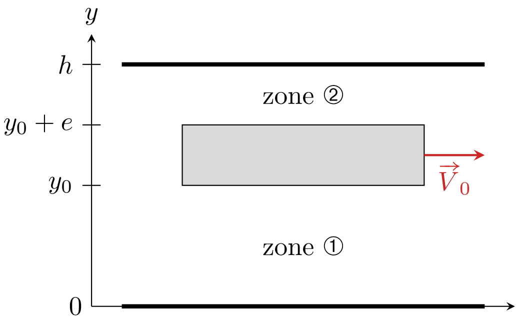
**3 -** Mêmes questions pour la plaque verticale.

**4 -** À quelle condition sur la hauteur d'eau y a-t-il basculement ? Déterminer la hauteur $h_0$ pour laquelle la plaque bascule.

# Écoulements, débits

## Exercice 5 : Double écoulement de Couette
oral banque PT | 1 | 2 |

- ▷ *Profil de vitesse ;*
- ▷ *Force de viscosité.*




Un fluide est confiné entre deux plans infinis situés en $y=0$ et $y=h$. Une plaque plane d'épaisseur $e$ et de surface $S$ est tractée à vitesse constante $V_0$ dans la direction $(Ox)$. Le poids et les forces de pression subies par la plaque se compensent.

On considère les zones ① et ② bien séparées, et on néglige les effets de bord. On suppose que le champ de vitesse dans chaque zone est de la forme

$$\vec{v}_{1/2} = (A_{1/2}\, y + B_{1/2})\vec{u}_x \,.$$

**1 -** Déterminer les quatre constantes $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$.

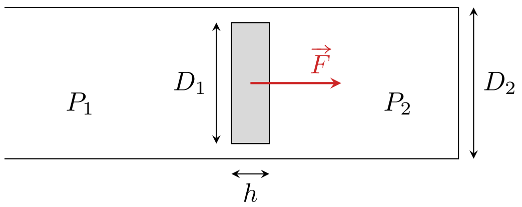
**2 -** Représenter graphiquement le champ de vitesse.

**3 -** Rappeler l'expression de la force de frottement visqueux $\mathrm{d}\vec{f}$ subie par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de la plaque en contact avec le fluide, en fonction de la viscosité $\eta$ du fluide et de la dérivée du champ de vitesse.

**4 -** En déduire la force de frottement totale $\vec{f}$ subie par la plaque et la force $\vec{F}_0$ à exercer pour maintenir la vitesse constante.

## Exercice 6 : Déplacement d'un piston à huile
oral banque PT | 3 | 2

- ▷ *Débit volumique ;*
- ▷ *Force de viscosité ;*
- ▷ *Lien entre mécanique des fluides et des solides.*




On considère un piston formé d'un cylindre plein (diamètre $D_1$, épaisseur $h$) coulissant dans un cylindre creux (diamètre $D_2 > D_1$). Le fluide à l'intérieur du piston est de l'huile de masse volumique $\mu$ et de viscosité $\eta$. On suppose $P_2 = 2P_1$. Un opérateur appuie de manière quasi-statique sur le piston avec une force $F$.

**1 -** Estimer simplement le gradient de pression GP dans l'interstice.

**2 -** On admet que la vitesse débitante du fluide dans l'interstice s'écrit $v_\mathrm{d} = \alpha\,\mathrm{GP}/\eta$, où $\alpha$ est une constante dépendant uniquement des diamètres. Déterminer le débit volumique de fuite.

**3 -** Estimer la force de frottement visqueux sur le piston.

**4 -** En déduire la force que doit exercer l'opérateur pour pouvoir pousser le piston.

## Exercice 7 : Résistance hydraulique d'une conduite
2 | 2

- ▷ *Débit volumique.*

On considère une conduite cylindrique de longueur $L$ et de rayon $R$ dans laquelle se trouve un fluide homogène et incompressible de viscosité $\eta$ et de masse volumique $\mu$. On impose à l'aide d'une pompe une différence de pression $\Delta P$ entre les deux extrémités de la conduite, ce qui entraîne un écoulement du fluide.

Le champ des vitesses $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ dans la conduite, exprimé en coordonnées cylindriques, est solution de l'équation de Navier-Stokes, qui s'écrit ici

$$\eta\vec{\Delta}\vec{v} = -\frac{\Delta P}{L} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\Delta P}{L}\,,$$

avec $\vec{\Delta}$ l'opérateur Laplacien vectoriel.

**1 -** Établir l'expression de $v(r)$ et représenter le profil de vitesse.

**2 -** Déterminer le débit volumique dans la conduite.

**3 -** On appelle résistance hydraulique $R_\mathrm{H} = \Delta P / D_\mathrm{v}$. Justifier cette dénomination par analogie avec d'autres phénomènes connus, puis exprimer $R_\mathrm{H}$ en fonction des données du problème.

**4 -** On souhaite imposer un débit volumique $D_\mathrm{v}$ avec une unique pompe. Pour minimiser la surpression à imposer par la pompe, est-il préférable d'utiliser une conduite de section $2S$ ou deux conduites de section $S$ installées en parallèle ?

# Théorème de Bernoulli

## Exercice 8 : Stockage d'énergie par pompage

oral banque PT | 2 | 1 |

- *Pertes de charge ;*
- *Puissance indiquée.*

Certains barrages de montagne peuvent fonctionner de manière réversible, sur le principe dit du pompage-turbinage, et ainsi permettre un stockage temporaire d'énergie : lors d'un pic de demande électrique, le barrage fonctionne en centrale hydroélectrique de manière traditionnelle ; mais lors d'un creux de demande et/ou d'un surplus de production électrique des pompes peuvent être activées pour remonter l'eau du point bas vers le point haut du barrage. On s'intéresse dans cet exercice à la phase de pompage, en prenant pour les applications numériques le cas (un peu simplifié) du barrage de Grand'Maison, dans le département de l'Isère.

On souhaite pomper de l'eau depuis un point $A$ en contre-bas jusqu'à un point $B$ situé 980 m plus haut. L'eau est acheminée avec un débit volumique $D_\mathrm{v} = 135\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ par un tuyau de rayon $a = 3{,}6\,\mathrm{m}$ et de longueur totale $L = 8{,}7\,\mathrm{km}$.

**1 -** Calculer la vitesse de l'eau dans le tuyau et la puissance de la pompe, sans tenir compte pour le moment des pertes de charge.

On rappelle la relation entre perte de charge $\Delta P$ et vitesse d'écoulement $v$ (loi de Darcy-Weisbach) :

$$\Delta P = \lambda \frac{L}{2a} \frac{\rho v^2}{2} \qquad \text{avec} \qquad \lambda = 0{,}02\,,$$

où $\lambda$ est appelé coefficient de perte de charge de Darcy.

**2 -** Rappeler ce que représentent les pertes de charge, et interpréter l'expression donnée [2]. Déterminer l'unité de $\lambda$.

**3 -** Calculer la puissance de la pompe, tenant compte des pertes de charge. La valeur réelle est de 1270 MW : commenter.

## Exercice 9 : Vase de Mariotte

oral banque PT | 3 | 2

- *Écoulement parfait ;*
- *Conservation de la masse ;*
- *Intégration par séparation de variables.*

On remplit à ras bord un réservoir de hauteur $H$ et de section $S$ (dispositif ① sur la figure 1) avec de l'eau de masse volumique $\rho$. L'eau s'écoule dans une conduite de section $s \ll S$ puis tombe dans un bécher initialement vide placé sur une balance. La pression extérieure $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$.

**1 -** Rappeler la relation de Bernoulli et ses hypothèses d'application.

**2 -** Déterminer le débit $D_1$ du fluide en sortie du tuyau, puis la masse $m_1(t)$ contenue dans le bécher au cours du temps.

On considère maintenant le dispositif ② de la figure 1. Le réservoir est fermé, mais un tuyau permet l'entrée d'air.

**3 -** Expliquer qualitativement pourquoi le mouvement du fluide est inchangé. On pourra penser à montrer qu'en régime permanent la pression à la base du tuyau est environ égale à la pression atmosphérique.

2. Question rajoutée par mes soins, l'énoncé original demandait de rappeler l'expression de la perte de charge ... ce qui me semble limite par rapport au programme.

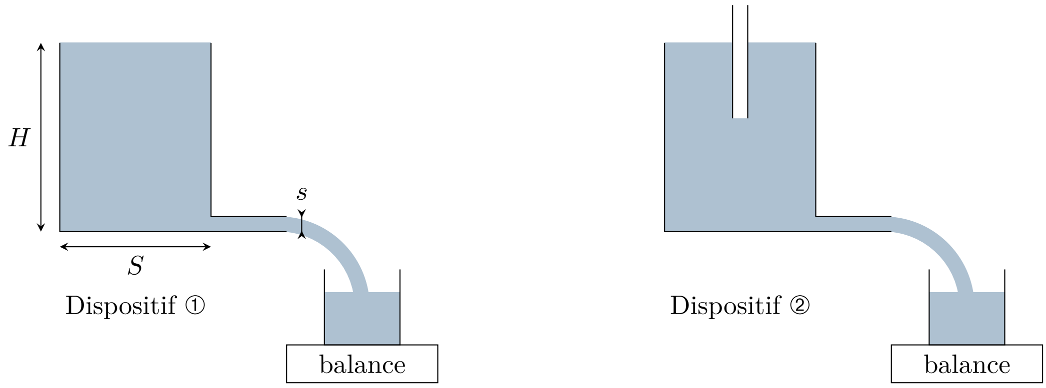


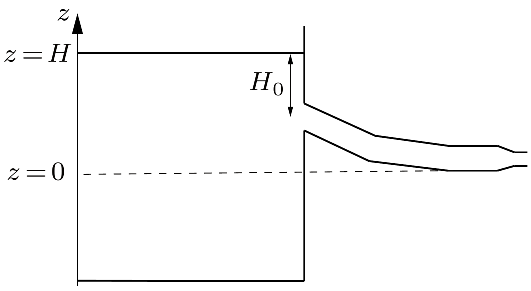

**Figure 1 – Vase de Mariotte.**

**4 -** On constate expérimentalement que $m_2(t) = at$. Expliquer.

**5 -** Que se passe-t-il lorsque le bas de l'arrivée d'air se retrouve émergée ?

## Exercice 10 : Cavitation dans une conduite forcée — inspiré oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Pertes de charge ;*
▷ *Puissance indiquée.*




Considérons une installation hydraulique de moyenne puissance, exploitant une retenue d'eau de hauteur $H = 95\,\mathrm{m}$ qui alimente une turbine, non représentée sur le schéma, par l'intermédiaire d'une conduite forcée de diamètre $D = 450\,\mathrm{mm}$, coudée en plusieurs endroits. La section de la conduite se resserre sur une longueur négligeable juste avant la turbine : ce dispositif est appelé injecteur. Il permet notamment d'empêcher la cavitation, c'est-à-dire la vaporisation du liquide lorsque la pression dynamique devient trop faible.

*Donnée :* pression de vapeur saturante de l'eau $P_{\text{sat}} = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{bar}$.

**1 -** Calculer la vitesse en sortie de la conduite en supposant l'écoulement parfait et en négligeant l'injecteur.

**2 -** Déterminer la pression $P(z)$ dans la conduite en fonction de $P_0, \rho, g$ et $z$. Peut-il y avoir un phénomène de cavitation ?

**3 -** On tient désormais compte de l'injecteur. Comparer la pression d'entrée et de sortie de l'injecteur. Si l'injecteur a un diamètre de sortie $d = 25\,\mathrm{mm}$, aura-t-on un phénomène de cavitation ?

**4 -** Le débit de sortie nominal vaut $80\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$ séparé en quatre injecteurs, qui traitent donc chacun $20\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$. Estimer les pertes de charge.

**5 -** En supposant la vitesse de l'eau négligeable une fois passée la turbine, estimer la puissance électrique produite par l'installation.