BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Préparation à l'oral — *Correction*

Électromagnétisme

Régime stationnaire et lentement variable

Exercice 1 : Plaques épaisses chargées

oral banque PT | 1 | 2

▷ *Équation de Maxwell-Gauss ;*
▷ *Lien entre champ et potentiel.*

1 La charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de section S englobant toute la hauteur de la distribution vaut

$$e\rho S + 2e\rho' S \underset{\substack{\uparrow\\ \text{neutralité}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\rho' = -\frac{\rho}{2}\,.}$$

2 La distribution étant invariante dans les directions y et z, $\vec{E}$ ne dépend que de x. De plus, la distribution étant infinie, tout plan contenant le vecteur $\vec{e}_x$ est plan de symétrie de la distribution. On en déduit

$$\boxed{\vec{E} = E_x(x)\vec{e}_x\,.}$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}\,.$$

Ainsi, pour $-e \leq x \leq 0$

$$E_x(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} + A\,.$$

Par continuité en $x = -e$,

$$E_x(-e) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(-e < x < 0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(e - x)\,.}$$

De même, pour $0 \leq x \leq 2e$ on a

$$E_x(x) = \frac{\rho' x}{\varepsilon_0} + A' = -\frac{\rho x}{2\varepsilon_0} + A'\,.$$

Par continuité en $x = 2e$,

$$E_x(2e) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CL}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} -\frac{\rho e}{\varepsilon_0} + A'$$

d'où on déduit

$$\boxed{E_x(0 < x < 2e) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x - 2e)}$$

> *On vérifie également que ces deux expressions sont compatibles avec la continuité en $x = 0$.*

Tracé figure 1.

3 Par définition,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -E_x\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Par intégration des résultats obtenus précédemment, on obtient

$$V(-e<x<0) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(ex - \frac{x^2}{2}\right) + B$$

et comme $V(x=0) = 0$ alors $B = 0$. De même,

$$V(0<x<2e) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - 2ex\right) + B'$$

avec de même $B' = 0$. Enfin, comme le champ est nul alors le potentiel prend une valeur constante en dehors des plaques que l'on détermine par continuité :

$$V(x<-e) = V(x=-e) = \frac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0}$$
$$V(x>2e) = V(x=2e) = -\frac{\rho e^2}{\varepsilon_0}$$

Finalement,

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{3\rho e^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } x<-e \\ -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(e - \dfrac{x}{2}\right)x & \text{si } -e<x<0 \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{x}{2} - 2e\right)x & \text{si } 0<x<2e \\ -\dfrac{\rho e^2}{\varepsilon_0} & \text{si } x>2e \end{cases}$$

Tracé figure 1 : le champ électrique, c'est-à-dire la dérivée du potentiel, est partout continu : c'est mathématiquement une fonction de classe $\mathcal{C}^0$. Le potentiel lui-même est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire qu'il est continu et ne présente aucun point anguleux (car ces points se traduiraient par des discontinuités de la dérivée). Les deux paraboles atteignent donc leur extremum en $x = -e$ et $x = 2e$ et se raccordent en $x = 0$ avec la même tangente.

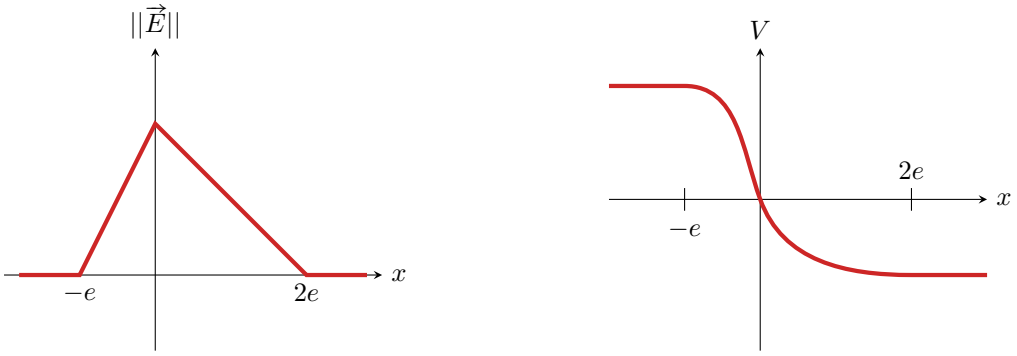


Figure 1 – Champ et potentiel dans le système de deux plaques épaisses.

Exercice 2 : Double couche électrochimique

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Condensateur ;*
▷ *Bilan de charge.*

1 Si la charge en surface de l'électrode est négative, alors elle attirera les cations, et réciproquement : compte tenu des conventions de signe de la figure, $\boldsymbol{\sigma_1}$ **est donc du même signe que** $\boldsymbol{\sigma}$.

2 Cf. cours pour la démonstration. Pour un plan chargé P situé en $x = x_P$, on a

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x>x_P \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x & \text{si } x<x_P \end{cases}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Ici, en tout point de la solution, le champ créé par les électrodes vaut

$$\vec{E}_{\text{él}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x\,.$$

Le champ créé par les couches d'ions varie en fonction de x :
▷ si $x < -a/2 + e$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x - \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{E}_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

▷ si $-a/2 + e < x < a/2 - e$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x - \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\vec{e}_x \qquad \text{d'où} \qquad \vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

▷ si $a/2 - e < x < a/2$:

$$\vec{E}_{\text{ion}} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x + \frac{-\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{E}_{\text{tot}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

> *Les électrodes et les couches d'ions forment une structure analogue à deux condensateurs imbriqués l'un dans l'autre. Le champ total est simplement la somme des deux champs.*

3 Tant que le champ électrique total au sein de la solution est non nul, alors des ions continueront à migrer pour modifier σ_1. Le phénomène ne cesse que lorsque le champ électrique dans la solution est nul, d'où

$$\boxed{\sigma_1(t \to \infty) = \sigma\,.}$$

4 Par définition,

$$U = \int_{x=-a/2}^{x=a/2} \mathrm{d}V = -\int_{x=-a/2}^{x=a/2} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

En reprenant les expressions précédentes des champs, le potentiel est partout linéaire, d'où

$$U = -\left[\frac{\sigma e}{\varepsilon_0} + \frac{(\sigma_1 - \sigma)(a-2e)}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}\right] = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(e + 2e - a + e) - \frac{\sigma_1(a-2e)}{\varepsilon_0}$$

et finalement

$$\boxed{U = \frac{\sigma(a-4e)}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1(a-2e)}{\varepsilon_0}\,.}$$

5 Le passage des ions au travers de la solution est décrit par un courant

$$\vec{\jmath} = j_x\vec{e}_x = \gamma\vec{E}\,.$$

Supposons les électrodes (et les couches ioniques) de surface S. La charge stockée sur la couche de charge $-\sigma_1$ vaut donc

$$q(t) = -\sigma_1(t)\,S\,.$$

Entre t et $t + \mathrm{d}t$, elle varie de

$$\mathrm{d}q = j_x S\,\mathrm{d}t = \gamma\frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0}S\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t}\,S\,\mathrm{d}t = \gamma\frac{\sigma_1 - \sigma}{\varepsilon_0}S\,\mathrm{d}t$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\sigma_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\sigma\,.}$$

En posant $\tau = \varepsilon_0/\gamma$ et comme $\sigma_1(0) = 0$, on en déduit

$$\boxed{\sigma_1(t) = \sigma\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 3 : Fil conducteur creux

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Théorème d'Ampère ;*
▷ *Principe de superposition.*

1 Cf. cours :

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j R^2}{2r}\vec{u}_\theta & \text{si } r \geq R \\ \dfrac{\mu_0 j r}{2}\vec{u}_\theta & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

2 Par définition, $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Il faut donc exprimer $\vec{u}_\theta$ en fonction de $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$, ce qui se fait grâce au produit vectoriel $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$. Ainsi,

$$\vec{u}_\theta = \frac{1}{r}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM}\,.$$

On en déduit

$$\vec{B}_0(M) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mu_0 j \dfrac{R^2}{r^2}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \geq R \\ \dfrac{1}{2}\mu j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} & \text{si } r \leq R \end{cases}$$

3 On applique le principe de superposition : la cavité est vue comme la superposition de deux distributions de courant $j\vec{u}_z$ et $-j\vec{u}_z$. À l'intérieur de la cavité, on a donc

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\mu j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$$

avec O' un point origine sur l'axe du cylindre creux, ce qui se simplifie en

$$\boxed{\vec{B}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}\mu j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OO'}\,.}$$

Le champ magnétique est donc uniforme à l'intérieur de la cavité.

Exercice 4 : Câble coaxial

oral CCINP PSI | 2 | 2 |

▷ *Théorème de Gauss ;*
▷ *Condensateur ;*
▷ *Théorème d'Ampère ;*
▷ *Énergie magnétique.*

1 Un théorème de Gauss sauvage apparaît ! La distribution de charge est schématisée figure 2.

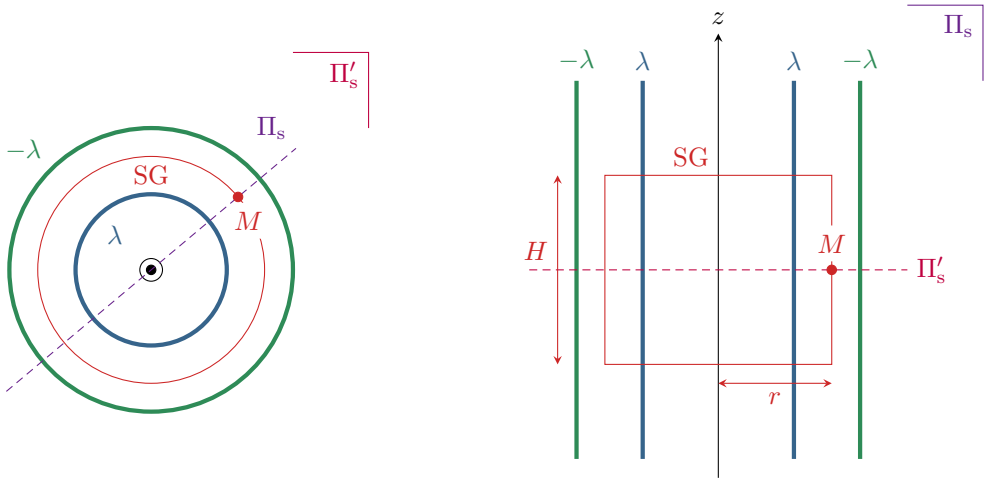


Figure 2 – Distribution de charge dans le câble coaxial.

- **Symétries :**

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▷ le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
▷ le plan $\Pi'_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie de la distribution de charges ;
▷ le champ électrique est inclus dans ces deux plans, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\,\vec{e}_r\,.$$

• **Invariances :** en supposant le câble infini, la distribution de charges est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

• **Surface de Gauss :** cylindre d'axe (Oz) passant par M, de rayon r et hauteur H, fermé par deux disques de normale $\vec{e}_z$.

• **Flux sortant :**

$$\oiint_{SG} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{bas} (E_r\,\vec{e}_r)\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) + \iint_{haut} (E_r\,\vec{e}_r)\cdot(+\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) + \iint_{lat} E_r(r)\,\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}S\,\vec{e}_r = E_r(r)\times 2\pi r H\,.$$

• **Charge intérieure :** la question ne porte que sur le champ entre l'âme et le blindage. On constate que la surface de Gauss choisie correspond à une longueur H de câble en ne contenant que l'âme, si bien que la charge intérieure y vaut

$$Q_{int} = \lambda H\,.$$

> *Et il ne coûterait pas bien cher de constater que $Q_{int} = 0$ à l'intérieur de l'âme et à l'extérieur du blindage ($\lambda H - \lambda H = 0$) ! Ainsi, le champ électrostatique est nul à l'extérieur du câble coaxial : c'est l'un de ses intérêts, qui le rend robuste aux perturbations électromagnétiques.*

• **Conclusion :** d'après le théorème de Gauss,

$$E_r(r)\times 2\pi r\cancel{H} = \frac{\lambda\cancel{H}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r\,r}\,\vec{e}_r\,.}$$

2 Par définition,

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}V = -\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{\mathrm{d}r}{r}\,.$$

En intégrant entre le blindage et l'âme,

$$\int_U^0 \mathrm{d}V = -\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad \text{d'où} \qquad -U = -\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

et finalement

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}\,U\,.}$$

3 En introduisant les grandeurs linéïques dans la définition de la capacité,

$$Q = CU \qquad \text{donc} \qquad \lambda\,\mathrm{d}\ell = \mathcal{C}\,\mathrm{d}\ell\,U \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{C} = \frac{\lambda}{U}\,.}$$

Par identification avec la question précédente,

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}\,.}$$

4 Un théorème d'Ampère sauvage apparaît ! La distribution de courant est schématisée figure 3. Elle n'est pas immédiate à comprendre, il ne faut surtout pas aller chercher plus loin que nécessaire ... et ce qui est nécessaire est de savoir que $\pm I$ désigne le courant *total* réparti en surface des conducteurs.

• **Symétries :** le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan,

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M)\,\vec{e}_\theta\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

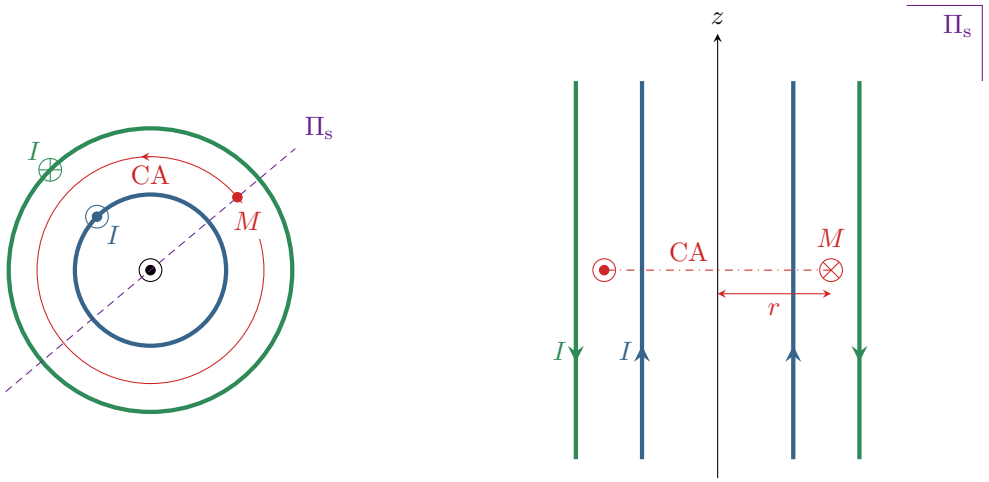


Figure 3 – Distribution de courant dans le câble coaxial.

> *Attention ! Le plan Π'_s représenté figure 2 est un plan d'**anti**-symétrie de la distribution de courant : il n'y a aucune raison que les plans aient le même statut s/a pour les deux distributions. Le champ magnétique doit être inclus dans ce plan, ce qui est cohérent avec son caractère orthoradial.*

- **Invariances :** la distribution de courant est invariante par toute translation d'axe (Oz) et toute rotation autour de cet axe,d onc

$$\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta\,.$$

- **Contour d'Ampère :** cercle de rayon r passant par M.
- **Circulation :**

$$\oint_{\text{CA}} \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}\ell} = B_\theta(r)\times 2\pi r\,.$$

- **Courant enlacé :** la question ne porte à nouveau que sur le champ entre l'âme et le blindage, zone dans laquelle le courant enlacé vaut en tout point

$$I_{\text{enl}} = I\,.$$

> *Attention à ne pas se tromper dans le courant enlacé : comme déjà indiqué au début de l'exercice, I est le courant **total** qui parcourt l'âme.*
>
> *On peut en plus constater qu'à l'intérieur de l'âme $I_{enl} = 0$ et à l'extérieur du blindage $I_{enl} = I - I = 0$. Comme le champ électrostatique, le champ magnétostatique est donc nul à l'extérieur du câble.*

- **Conclusion :** d'après le théorème d'Ampère,

$$B_\theta(r)\times 2\pi r = \mu_0 I \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\theta\,.}$$

5 La densité volumique d'énergie magnétique vaut

$$u_{\text{m}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0\cancel{^2}I^2}{4\pi^2 r^2}\times\frac{1}{2\cancel{\mu_0}} \qquad \text{soit} \qquad u_{\text{m}} = \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2}I^2\,.$$

Ainsi, l'énergie magnétique stockée dans le tronçon élémentaire de câble vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}} &= \iint \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2}I^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\ell\\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2}I^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\times\mathrm{d}\ell\times\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\\ &= \frac{\mu_0}{8\pi^2}I^2\times 2\pi\times\mathrm{d}\ell\times\ln\frac{R_2}{R_1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{m}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\mathrm{d}\ell\,\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)I^2\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

6 L'énergie magnétique s'exprime en fonction de l'inductance $\mathcal{L}\,\mathrm{d}\ell$ du tronçon

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\,\mathrm{d}\ell\, I^2$$

ce qui permet d'identifier

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\,.}$$

> *Dans cette situation, la méthode énergétique est beaucoup plus facile que le calcul du flux propre pour calculer l'inductance : il n'est clairement pas évident de voir au travers de quelle surface le flux propre doit être calculé !*

Exercice 5 : Diode à vide

inspiré oral banque PT | 2 | 2

▷ *Équation de Poisson ;*
▷ *Mouvement d'une charge dans un potentiel ;*

1 Un problème physique est dit à symétrie cylindrique lorsqu'il est invariant par toute rotation autour de l'axe (Oz).

2 L'espace entre les deux électrodes est vide, donc d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,.$$

Par une première intégration, on trouve

$$r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = A = \text{cte} \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}$$

et une deuxième intégration donne

$$V(r) = A\ln r + B \qquad \text{avec} \qquad A, B = \text{cte}\,.$$

Les constantes se trouvent avec les conditions aux limites,

$$\begin{cases} V(r=R_A) \underset{\text{CL}}{=} 0 \underset{\text{calcul}}{=} A\ln R_A + B \\ V(r=R_C) \underset{\text{CL}}{=} U_0 \underset{\text{calcul}}{=} A\ln R_C + B \end{cases}$$

Par soustraction, il vient

$$U_0 = A\ln\frac{R_C}{R_A} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\,,$$

et on en déduit

$$B = -\frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln R_A$$

Finalement,

$$V(r) = \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln r - \frac{U_0}{\ln(R_C/R_A)}\ln R_A \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{V(r) = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}U_0\,.}$$

3 Un électron est une particule chargée négativement, qui se déplace donc vers les zones de potentiel le plus élevé : pour que la diode soit passante, il faut que les électrons émis à l'anode migrent vers la cathode, soit $U_0 > 0$. Au contraire, si $U_0 < 0$ les électrons resteront bloqués au voisinage de l'anode et ne rejoindront jamais la cathode.

4 Le système étant par hypothèse à symétrie cylindrique, la vitesse d'un électron ne peut dépendre que de r. Sa vitesse initiale est nulle par hypothèse et il n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique, $\vec{F} = -e\vec{E}$, car son poids est négligeable. Comme V ne dépend que de r alors $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$ est porté par $\vec{e}_r$, et une double intégration du PFD appliqué à un électron montre que sa vitesse est nécessairement radiale également.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

La force de Lorentz dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p} = -eV$. Comme l'électron n'est soumis qu'à cette seule force conservative, son énergie mécanique est une constante du mouvement. En l'exprimant en $r = R_A$, on obtient

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv(r=R_A)^2 - e\,V(r=R_A) = 0\,.$$

En l'exprimant en r quelconque,

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv(r)^2 - e\,V(r) = \frac{1}{2}mv(r)^2 - \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}eU_0\,.$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv(r)^2 = \frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}eU_0$$

et ainsi

$$\boxed{v(r) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}\frac{\ln(r/R_A)}{\ln(R_C/R_A)}}\,.}$$

> *On constate que ce résultat n'a pas de sens si $U_0 < 0$, ce qui signifie physiquement que l'électron ne peut pas atteindre la sphère de rayon r.*

5 Compte tenu de la symétrie cylindrique, le vecteur densité de courant s'écrit

$$\vec{j} = j(r)\,\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) = -n(r)\,e\,v(r)\,.$$

L'intensité (orientée de la cathode vers l'anode, en sens opposé au mouvement des électrons) traversant un cylindre de rayon r est indépendante du rayon (conservation de la charge) et est reliée à j par

$$I = \iint \vec{j}\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 2\pi rH\,j(r)\,.$$

Ainsi,

$$I = 2\pi rH\,n(r)\,e\,v(r) \qquad \text{soit} \qquad n(r) = \frac{I}{2\pi rH\,e\,v(r)}$$

et ainsi

$$\boxed{n(r) = \frac{I}{2\pi rH\,e}\sqrt{\frac{m}{2eU_0}\frac{\ln(R_C/R_A)}{\ln(r/R_A)}}\,.}$$

Exercice 6 : Supraconducteur

exemple officiel banque PT | 2 | 2

- ▷ *Équations de Maxwell ;*
- ▷ *Théorème d'Ampère ;*
- ▷ *Inductance propre.*

1 Les quatre équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \underset{\text{stat}}{=} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \underset{\text{stat}}{=} \mu_0\,\vec{j} \end{cases}$$

Soit une surface $\mathcal{S}$ s'appuyant sur un contour fermé $\mathcal{C}$. On se place en régime stationnaire.

$$\iint_\mathcal{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \underset{\text{MA}}{=} \mu_0 \iint_\mathcal{S} \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 I_\mathrm{enl} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

où I_{enl} est le courant enlacé par le contour $\mathcal{C}$. Ainsi,

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}} \,.}$$

2 D'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) &= \mu_0 \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} \underset{\text{London}}{=} -\frac{1}{\lambda^2}\vec{B} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} \underset{\text{MT}}{=} -\Delta\vec{B}\,.\end{aligned}$$

En identifiant on en déduit

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = \vec{0}\,.}$$

3 L'énoncé n'est pas des plus clair ... il suppose implicitement qu'il y a invariance par translation selon x et y, et surtout qu'il y a continuité du champ magnétique en $x = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas. Sous ces hypothèses, l'équation devient

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{B}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} = \vec{0}\,.$$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$r^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad r = \pm\frac{1}{\lambda}$$

et les solutions sont donc de la forme

$$\vec{B} = \vec{K}_1\,\mathrm{e}^{-x/\lambda} + \vec{K}_2\,\mathrm{e}^{+x/\lambda}$$

avec $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$ deux constantes vectorielles. En admettant que le champ magnétique ne diverge pas lorsque $x \to +\infty$, on trouve

$$\vec{K}_2 = \vec{0}\,.$$

Enfin, en supposant la continuité du champ magnétique en $x = 0$ on obtient $\vec{K}_1 = \vec{B}_1$ d'où finalement

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1\,\mathrm{e}^{-x/\lambda}\,.}$$

4 Raisonnons sur la figure 4 : le tore est supposé de rayon moyen R, sa section circulaire de rayon a, et il est bobiné par $N \gg 1$ spires réparties continûment. Soit M un point quelconque de l'espace.

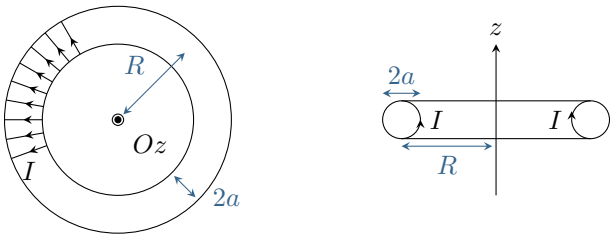


Figure 4 – Bobine torique.

• **Symétries :** le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ (plan de la figure de droite de l'énoncé) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan.

$\rightsquigarrow\ \vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_\theta$.

• **Invariances :** comme les spires sont supposées réparties continûment, alors la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe Oz. Le champ $\vec{B}(M)$ ne dépend donc pas de θ, d'où

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r,z)\vec{e}_\theta\,.}$$

• **Théorème d'Ampère :**

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▷ On raisonne sur un cercle passant par M et d'axe Oz, orienté par la règle de la main droite selon l'axe Oz.
▷ Circulation :

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint B(r,z)\,\vec{e}_\theta \cdot \mathrm{d}\ell\,\vec{e}_\theta = 2\pi r B(r,z)\,.$$

▷ Courant enlacé : en raisonnant sur les schémas on peut facilement comprendre que le courant enlacé vaut

$$I_{\text{enl}} = \begin{cases} NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}$$

> *Il faut toujours se méfier du signe des courants enlacés, par règle de la main droite avec l'orientation du contour : ici c'est positif.*

▷ Conclusion : d'après le théorème d'Ampère,

$$2\pi r B(r,z) = \begin{cases} \mu_0 NI & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{B}(M) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}\,\vec{e}_\theta & \text{si } M \in \text{tore} \\ \vec{0} & \text{si } M \notin \text{tore} \end{cases}}$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.

Je ne suis pas sûr de comprendre la suite de la question ... Si l'on envoie des électrons au travers du tore, ils ne voient aucun champ magnétique et donc ne doivent pas être déviés par la force de Lorentz.

La suite de la question est complètement hors de portée d'un candidat en PT : l'expérience de Tonomura a permis de vérifier un effet de mécanique quantique appelé effet Aharonov-Bohm qui indique que même si le champ magnétique est nul les électrons ressentent son effet via le potentiel vecteur ... qui est hors programme en PT.

5 Le champ magnétique à l'intérieur du tore est donné par l'expression précédente. Le flux au travers d'une spire vaut

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \times a \times \int_R^{R+a} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}\,.$$

Le flux propre du tore est

$$\phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N^2 Ia}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

et par définition $L = \phi/I$ d'où

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right).}$$

Exercice 7 : Émission radioactive

d'après divers oraux | 2 | 2

▷ *Équations de Maxwell.*

1 L'amas émet des charges positives, il est donc logique que sa charge soit négative et décroissante. L'allure exponentielle est typique de la radioactivité. À l'instant initial, on a $q(t=0) = 0$: aucun atome ne s'est désintégré donc l'amas est neutre.

2 L'émission étant isotrope, le vecteur densité de courant est forcément à symétrie sphérique : $\vec{\jmath} = j_r(r)\,\vec{e}_r$. Ainsi, tout plan contenant (OM) est plan de symétrie de la distribution de courant, donc $\vec{B}(M,t)$ doit être orthogonal à chacun de ces plans et est donc forcément nul :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \vec{0}\,.}$$

> *Au delà de l'ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère indique qu'un champ électrique variable est également source de champ magnétique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial\vec{E}/\partial t$. Cependant, d'après le théorème de superposition, les propriétés de symétrie doivent être vérifiées pour* chaque *« famille » de sources. Les symétries des courants imposant d'avoir $\vec{B} = \vec{0}$, le champ électrique ne pourra rien y changer.*

3 • **Symétries :** la distribution de charge possède les mêmes symétries que la distribution de courant, mais comme $\vec{E}$ doit être inclus dans un plan de symétrie il n'est pas nul mais radial,

$$\vec{E}(M,t) = E_r(M,t)\,\vec{e}_r\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> *L'équation de Maxwell-Faraday indique qu'un champ magnétique variable est également source de champ électrique : dans un cas plus général, il faut donc également étudier les plans de symétrie de $\partial\vec{B}/\partial t$ ... mais ce n'est pas la peine ici car $\vec{B} = \vec{0}$, tout se passe exactement comme en statique.*

• **Invariances :** à tout instant la distribution de charge est invariante par rotation autour de l'amas, donc $\vec{E}$ ne dépend que de r.

• **Théorème de Gauss**, qui s'applique aussi dans l'ARQS : on raisonne sur une sphère de rayon r centré sur l'amas.

▷ calcul du flux : $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 \, E_r$.

▷ calcul de la charge intérieure : il faut un temps r/v_0 pour qu'une particule α sorte de la sphère de rayon r, donc la charge contenue dans la sphère à un instant t est la charge de l'amas à l'instant $t - r/v_0$.

$$Q_{\text{int}} = q\left(t - \frac{r}{v_0}\right)$$

• **Conclusion :**

$$\boxed{\vec{E}(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{r}{v_0}\right)\right) \vec{e}_r \, .}$$

4 D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned}
\rho(r,t) &= \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{Q_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)\right] \\
&= \frac{Q_0}{4\pi r^2} \times \frac{1}{v_0\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \\
\boxed{\rho(r,t) &= \frac{Q_0}{4\pi \, v_0\tau \, r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)}
\end{aligned}$$

D'après l'équation de Mawxell-Ampère,

$$\begin{aligned}
\vec{j}(r,t) &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
&= \vec{0} - \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right)\right] \vec{e}_r \\
&= -\frac{Q_0}{4\pi r^2} \times -\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \\
\boxed{\vec{j}(r,t) &= \frac{Q_0}{4\pi \, \tau \, r^2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{r}{v_0\tau}\right) \vec{e}_r \, .}
\end{aligned}$$

> *On retrouve $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_r$ ... on aurait pu s'y attendre !*

Induction

Exercice 8 : Rails de Laplace couplés

d'après oraux banque PT | 2 | 2 |

▷ *Rails de Laplace ;*
▷ *Bilan énergétique.*

Utilisons les notations de la figure 5, et notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barreaux, et v_1 et v_2 leurs vitesses algébriques.

1 • **Équation électrique :** la surface du circuit est $a(x_2 - x_1)$ et le champ est uniforme, donc le flux magnétique vaut

$$\phi = a(x_2 - x_1) \, B$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

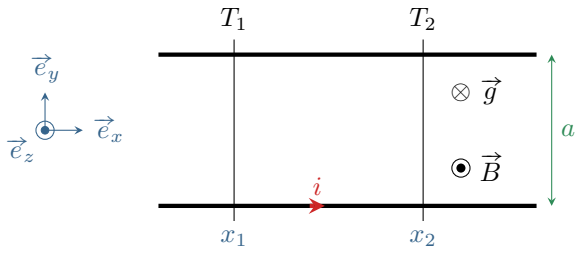


Figure 5 – Rails de Laplace couplés.

d'où on déduit la f.é.m. induite,

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -a(v_2 - v_1)B\,.$$

Le circuit équivalent contient deux résistances R montées en série, équivalentes à une unique résistance $2R$, et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = 2Ri \qquad \text{soit} \qquad -a(v_2 - v_1)B = 2Ri\,.$$

• **Équations mécaniques :** les deux équations mécaniques s'obtiennent par application du théorème de la résultante cinétique aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace. En orientant l'intensité comme sur la figure 5, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\,\vec{e}_y) \wedge (B\,\vec{e}_z) = -iaB\,\vec{e}_x \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_2 = i(+a\,\vec{e}_y) \wedge (B\,\vec{e}_z) = iaB\,\vec{e}_x$$

Le TRC projeté sur $\vec{e}_x$ donne alors

$$m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -iaB \qquad \text{et} \qquad m\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = +iaB\,.$$

• **Bilan :** en combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \\ \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \end{cases}}$$

2 Sans indication, la question est un peu ardue ... Il faut découpler ces équations couplées en prenant la somme et la différence.

• **Différence :** posons $\delta = v_2 - v_1$. Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\delta = 0$$

qui s'intègre en

$$\delta(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

À l'instant initial,

$$\delta(0) \underset{\text{sol}}{\uparrow} = A \underset{\text{CI}}{\uparrow} = v_2(0) - v_1(0) = -v_0$$

si bien que

$$\delta(t) = -v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

• **Somme :** posons maintenant $\sigma = v_1 + v_2$. À partir du système d'équations couplées, il vient

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \sigma = \mathrm{cte}\,.$$

La constante se détermine à l'instant initial,

$$\sigma = v_1(0) + v_2(0) = v_0\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Retour aux vitesses des barreaux :** en inversant,

$$v_1(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = \frac{\sigma + \delta}{2}$$

soit

$$\boxed{v_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).}$$

3 Si la vitesse de la tige T_1 est imposée, c'est qu'elle est soumise à une force supplémentaire qui permet de la contrôler. Le TRC appliqué à T_1 est donc modifié par rapport aux questions précédentes. Raisonnons donc sur le TRC appliqué à T_2 traduit en représentation complexe,

$$\mathrm{j}\omega\underline{v_2} = -\frac{1}{2\tau}(\underline{v_2} - \underline{v_1})$$

qui donne

$$(1 + 2\mathrm{j}\tau\omega)\underline{v_2} = \underline{v_1}\,.$$

On en déduit l'amplitude,

$$|\underline{v_2}| = \frac{|\underline{v_1}|}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}$$

et le déphasage

$$\varphi = -\arg(1 + 2\mathrm{j}\tau\omega) = -\arctan(2\tau\omega)\,.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}\cos\left[\omega t - \arctan(2\tau\omega)\right].}$$

4 Les équations mécaniques s'écrivent

$$m\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -iaB \qquad \text{et} \qquad m\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = +iaB$$

donc en les multipliant respectivement par v_1 et v_2 on obtient

$$mv_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_1}^2\right) = -iaBv_1 \qquad \text{et} \qquad mv_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_2}^2\right) = iaBv_2\,.$$

Prenons maintenant l'équation électrique, et multiplions-là par i,

$$-a(v_2 - v_1)B = 2Ri \qquad \text{soit} \qquad -a(v_2 - v_1)Bi = 2Ri^2\,.$$

En combinant on en déduit

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_2}^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_1}^2\right) = 2Ri^2$$

ou encore

$$\underbrace{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_1}^2\right)}_{\text{énergie cinétique perdue par 1}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m{v_2}^2\right)}_{\text{énergie cinétique gagnée par 2}} + \underbrace{2Ri^2}_{\text{effet Joule}}\,.$$

Ainsi, l'énergie cinétique perdue par le barreau 1 est entièrement récupérée par le barreau 2 ou dissipée par effet Joule.

> *La méthode est générale et à retenir : pour obtenir le bilan énergétique en présence d'induction, il faut multiplier les équations électrique et mécanique par la bonne grandeur pour obtenir une puissance. Le TRC implique des forces, une puissance s'obtient en multipliant par la vitesse ; la loi des mailles implique des tensions qu'il faut multiplier par l'intensité pour obtenir une puissance. Il reste ensuite à sommer les deux équations, ce qui a le bon goût d'éliminer le terme en champ magnétique, et interpréter le résultat.*

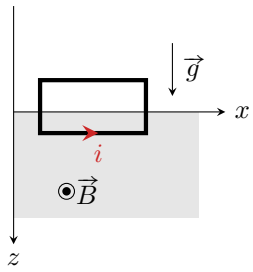
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 9 : Freinage par induction

2 | 2 |

▷ *Équations électrique et mécanique.*



1 Lorsqu'elle pénètre dans la zone de champ magnétique, la cabine est soumise à son poids qui est vertical selon $\vec{e}_z$. En outre, comme le flux magnétique au travers de la spire varie, un courant induit apparaît dans la spire, responsable d'une force de Laplace. Sans préjuger du signe réel du courant induit, orientons la spire de telle sorte que la normale orientée soit dans le même sens que $\vec{B}$, ce qui oriente nécessairement le courant dans le sens représenté ci-contre. Sur les deux parties verticales plongées dans la zone de champ, le courant est le même mais circule dans des sens différents, donc les forces de Laplace sont opposées. En revanche, seul un des deux côtés horizontaux voit le champ magnétique et subit une force de Laplace

$$\vec{F}_\mathrm{L} = iaB\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = iaB\vec{e}_z\,.$$

Finalement, la vitesse initiale et toutes les forces subies par la cabine d'ascenseur sont dirigées selon $\vec{e}_z$. On en déduit que **le mouvement de la cabine reste une translation le long de cet axe.**

2 • **Équation mécanique :** D'après le théorème de la résultante appliquée à la cabine dans le référentiel terrestre galiléen, **tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ**, on a par projection sur l'axe z

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = +mg + iaB\,.}$$

• **Équation électrique :** Du point de vue électrique, il faut prendre en compte la résistance R de la spire et la force électromotrice induite. Calculons cette f.é.m. La surface de circuit plongée dans le champ magnétique est égale à $S(t) = az$ **tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ**. Ainsi, le flux magnétique vaut

$$\phi(t) = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = +azB\,,$$

et d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -aBv\,.$$

La loi des mailles appliquée dans le circuit équivalent donne

$$e = Ri \qquad \text{soit} \qquad \boxed{-aBv = Ri\,.}$$

• **Découplage des équations :** on dispose de deux équations, mais l'intensité du courant dans la spire est inconnue. D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{aB}{R}v\,,$$

ce qui donne en injectant dans l'équation mécanique

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{(aB)^2}{R}v$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}v = g \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{Rm}{(aB)^2}\,.}$$

3 La forme générale des solutions est

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau\,,$$

avec

$$v(0) \underset{\text{CI}}{=} v_0 \underset{\text{expr}}{=} A + g\tau \qquad \text{d'où} \qquad A = v_0 - g\tau\,.$$

Finalement,

$$\boxed{v(t) = (v_0 - g\tau)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + g\tau\,.}$$

L'équation et donc évidemment sa solution ne sont valables que lorsque la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Lorsque $z \geq b$, la boucle conductrice est intégralement dans la zone de champ magnétique si

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

bien le flux au travers de la spire ne varie plus et le phénomène d'induction cesse. **La cabine retrouve alors un mouvement de chute libre**, et est de nouveau accélérée.

4 Si la cabine se trouvait complètement arrêtée, alors le flux magnétique ne varierait plus et le phénomène d'induction cesserait. La force de Laplace s'annulerait alors ... mais pas le poids de la cabine ! La cabine se retrouverait donc soumise à une seule force verticale vers le bas, et serait donc à nouveau accélérée puisqu'il n'y a rien pour la retenir. On en déduit qu'un freinage magnétique ne permet pas d'arrêter complètement la cabine d'ascenseur.

Exercice 10 : Plaque de cuisson à induction

2 | 2

▷ *Induction mutuelle ;*
▷ *Approche temporelle et fréquentielle.*

1 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 6.

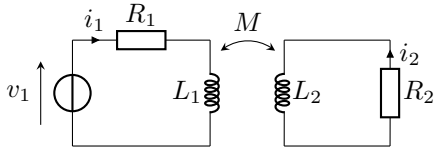


Figure 6 – Schéma équivalents à une plaque à induction.

Par application de la loi des mailles, et en tenant compte de l'induction mutuelle, on obtient

$$\begin{cases} v_1 = R_1\, i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ 0 = R_2\, i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

2 Traduisons l'équation de fonctionnement de l'induit (circuit 2) en complexes,

$$0 = R_2 \underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega L_2\, \underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_1 \,,$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\underline{H} = -\frac{\mathrm{j}M\omega}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}}$$

3 D'après l'équation de fonctionnement de l'inducteur,

$$\underline{V}_1 = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \underline{I}_2 \qquad \text{d'où} \qquad \underline{Z}_\mathrm{e} = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}M\omega \underline{H} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{Z}_\mathrm{e} = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2}\,.}$$

4 Dans l'hypothèse très haute fréquence, les expressions se simplifient en

$$\underline{H} = -\frac{M}{L_2} \qquad \text{et} \qquad \underline{Z}_\mathrm{e} = \mathrm{j}L_1\omega \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

Numériquement,

$$\boxed{\left|\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right| = 8{,}3 \qquad \text{et} \qquad |\underline{Z}_\mathrm{e}| = 2{,}1\,\Omega\,.}$$

> *On remarque que la qualité du couplage inductif apparaît dans l'expression de $\underline{Z}_e$: si le couplage est parfait, $M = \sqrt{L_1 L_2}$, alors l'impédance d'entrée du système est nulle, signe d'une transmission parfaite de l'énergie électromagnétique. On retrouve exactement le même résultat à propos du transformateur.*
>
> *Remarquons aussi que la différence de nombre de spires dans l'inducteur et l'induit permet au courant à l'induit d'être nettement supérieur au courant à l'inducteur, et donc de fournir davantage d'effet Joule dans le fond de la casserole.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

5 Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue) et donc **l'impédance d'entrée augmente**. Plus précisément, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue combien même le courant dans l'inducteur serait imposé, ce qui indique que M diminue. Si l'impédance d'entrée augmente alors que la tension d'alimentation v_1 ne change pas, alors la définition de $\underline{Z}_\text{e}$ montre que **l'inducteur appelle moins de courant**.

Ondes électromagnétiques

Exercice 11 : Structure d'une OPPH

oral banque PT | 1 | 1

- ▷ *OPPH ;*
- ▷ *Équations de Maxwell en écriture complexe ;*
- ▷ *Vecteur de Poynting.*

1 De façon la plus générale possible, le champ électrique d'une OPPM s'écrit sous la forme

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM})} .$$

> *On peut prendre la convention inverse pour l'exponentielle complexe :*
>
> $$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} - \omega t)} .$$

2 Avec cette convention, on a les correspondances

$$\frac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow \times \mathrm{i}\omega \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} \longleftrightarrow \mathrm{i}\vec{k} .$$

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent donc

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ \mathrm{i}\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ \mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}} \\ \mathrm{i}\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mathrm{i}\omega\,\varepsilon_0\mu_0\,\underline{\vec{B}} \end{cases}}$$

> *Choisir l'autre convention change tous les signes.*

3 Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson indiquent que $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont orthogonaux au vecteur d'onde, donc à la direction de propagation, ce qui est bien la définition de deux champs transverses.

4 Dans ce cas particulier, $\vec{k} = k\vec{e}_x$ et $\underline{\vec{E}}_0 = E_0\vec{e}_y$, le champ électrique de l'onde s'écrit donc

$$2\underline{\vec{E}} = E_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\vec{e}_y .$$

On en déduit directement

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9{,}9\cdot10^6\,\mathrm{rad\cdot m^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \omega = kc = 3{,}0\cdot10^{15}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} .}$$

Avec la relation de structure, on en déduit le champ magnétique,

$$\underline{\vec{B}} = \vec{e}_x \wedge \frac{\underline{\vec{E}}}{c} = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\vec{e}_z .$$

Enfin, le vecteur de Poynting moyen s'écrit

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^\star}{\mu_0}\right) = \frac{{E_0}^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_x .$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

On obtient la puissance du faisceau en calculant le flux du vecteur de Poynting moyen au travers du disque de normale $\vec{e}_x$ et de diamètre $d = 2\,\text{mm}$,

$$\mathcal{P} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{{E_0}^2}{2\mu_0 c} \times \frac{\pi d^2}{4}$$

ce qui donne

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{8\mu_0 c\,\mathcal{P}}{\pi d^2}} = 490\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}\,.}$$

Exercice 12 : Réflexion d'une onde électromagnétique

oral banque PT | 1 | 1

▷ *OPPH ;*
▷ *Réflexion sur un conducteur parfait.*

1 Il s'agit d'une onde plane progressive harmonique polarisée linéairement selon $\vec{u}_x$ et se propageant dans le sens des z croissants.

2 L'onde réfléchie se propage dans le sens des z décroissants, son amplitude peut différer de celle de l'onde incidente et elle peut être déphasée. On la suppose de même polarisation que l'onde incidente. On la cherche donc sous la forme

$$\vec{E}_\text{r} = E_0' \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\vec{u}_x\,.$$

Ainsi, l'onde totale dans le demi-espace $z < 0$ s'écrit

$$\vec{E}_\text{tot} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u}_x + E_0' \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\vec{u}_x\,.$$

Les champs sont nuls dans un conducteur parfait, donc en $z > 0$ on a $\vec{E}_\text{c} = \vec{0}$.

L'interface est de normale $\vec{u}_z$, la composante selon $\vec{u}_x$ est bien tangentielle, et la relation de passage s'écrit à tout instant

$$\vec{E}_\text{tot}(z=0,t) = \vec{E}_\text{c}(z=0,t) \qquad \text{soit} \qquad E_0\cos(\omega t) + E_0'\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

On en déduit $\varphi = 0$ (si $\omega t = \pi/2$ alors $\omega t + \varphi = \pi/2$ aussi car E_0' est non nul) puis $E_0' = -E_0$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{E}_\text{r} = -E_0 \cos(\omega t + kz)\,\vec{u}_x\,.}$$

3 L'onde totale s'écrit

$$\vec{E}_\text{tot} = E_0\,[\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)]\,\vec{u}_x\,.$$

soit en utilisant la relation trigonométrique donnée

$$\vec{E}_\text{tot} = -2E_0 \sin(\omega t)\sin(-kz)\,\vec{u}_x = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kz)\,\vec{u}_x\,.$$

Ainsi, le champ total s'annule lorsque $\sin(kz) = 0$ soit (n entier)

$$kz = n\pi \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{z = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}\,.}$$

La période spatiale des annulations est donc $\pi/k = \lambda/2$.

4 Numériquement,

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = 0{,}5\,\text{mm}\,.$$

Le champ s'annule donc tous les 500 µm.

5 Le capteur fonctionne visiblement selon un phénomène d'induction : la grandeur mesurée est donc le **flux au travers du cadre du champ magnétique** de l'onde.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 13 : Pression de radiation

oral banque PT | 2 | 2

▷ *Réflexion sur un conducteur parfait ;*
▷ *Force de Laplace.*

1 L'énoncé ne dit pas en fonction de quelles grandeurs les expressions doivent être données. Je propose de garder la pulsation ω et c, mais d'autres choix seraient possibles. Il ne précise pas non plus si on travaille avec les champs réels ou complexes, je fais le choix de privilégier les complexes. D'après la relation de dispersion, le vecteur d'onde s'écrit

$$\boxed{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z\,.}$$

Le champ électrique s'écrit

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x\,,}$$

et on déduit le champ magnétique de la relation de structure

$$\underline{\vec{B}} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{E}}{c} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{E_0}}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y\,.}$$

2 L'onde réfléchie a la même pulsation et la même polarisation [1] que l'onde incidente et se propage dans le sens des z décroissants. Ainsi,

$$\vec{k}' = -\frac{\omega}{c}\vec{u}_z \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}'} = \underline{E_0'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\vec{u}_x\,.$$

Déterminons $\underline{E_0'}$ par application de la relation de passage appliquée en $z = 0$. Le vide est le milieu 1 où le champ vaut $\underline{\vec{E}} + \underline{\vec{E}'}$, le conducteur le milieu 2 dans lequel les champs sont nuls. Ainsi, en $z = 0$,

$$\left(\vec{0} - (\underline{E_0} + \underline{E_0'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{u}_x\right) \wedge \vec{u}_z = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{E_0} + \underline{E_0'} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \underline{E_0'} = -\underline{E_0}$$

On a donc

$$\boxed{\underline{\vec{E}'} = -\underline{E_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\vec{u}_x\,.}$$

Le champ magnétique s'obtient de nouveau par la relation de structure,

$$\underline{\vec{B}'} = -\vec{u}_z \wedge \frac{\underline{\vec{E}'}}{c} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\underline{\vec{B}'} = +\frac{\underline{E_0}}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + kz)}\,\vec{u}_y\,.}$$

3 La relation de passage en $z = 0$ pour le champ magnétique s'écrit

$$\left(\vec{0} - 2\frac{\underline{E_0}}{c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{u}_y\right) \wedge \vec{u}_z = -\mu_0\underline{\vec{j}_\mathrm{s}}\,.$$

On en déduit

$$\boxed{\underline{\vec{j}_\mathrm{s}} = 2\frac{\underline{E_0}}{\mu_0 c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{u}_x\,.}$$

4 La force de Laplace subie par un tronçon élémentaire de fil de longueur $\mathrm{d}\ell$ s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{L} = i\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}\,,$$

où le vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est orienté dans le sens du courant. Par analogie, la force $\mathrm{d}\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de conducteur de surface $\mathrm{d}S$ situé en $z = 0$ peut s'écrire

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{j}_\mathrm{s}\,\mathrm{d}S \wedge \vec{B}(z{=}0)\,.$$

En utilisant les champs complexes, seule la valeur moyenne temporelle est accessible, donnée par

$$\langle \mathrm{d}\vec{F} \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}_\mathrm{s}} \wedge \underline{\vec{B}}^\star(z{=}0)\right)\mathrm{d}S$$

1. Je fais le choix de l'admettre pour alléger le calcul, mais nous l'avons démontré dans le cours.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Dans le cas présent,

$$\langle \mathrm{d}\vec{F} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{2\underline{E_0}}{\mu_0 c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \vec{u}_x \wedge \frac{2\underline{E_0}^\star}{c} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \vec{u}_y \right) \mathrm{d}S$$

ce qui donne

$$\langle \mathrm{d}\vec{F} \rangle = \frac{2\left|\underline{E_0}\right|^2}{\mu_0 c^2} \mathrm{d}S \, \vec{u}_z \, .$$

On constate que la force est portée par $\vec{u}_z$, ce qui semble cohérent avec l'intuition. En revenant à la définition de la pression comme force par unité de surface, et puisque $\mu_0 c^2 = 1/\varepsilon_0$ on en déduit l'expression de la pression de radiation,

$$\boxed{P = 2\varepsilon_0 \left|\underline{E_0}\right|^2 \, .}$$

Exercice 14 : Absorption par l'atmosphère

oral banque PT | 2 | 2

▷ *OPPH ;*
▷ *Vecteur de Poynting ;*
▷ *Bilan d'énergie électromagnétique.*

1 Le champ électrique complexe s'écrit

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} \vec{e}_y \, .$$

D'après la relation de structure,

$$\underline{\vec{B}} = \vec{e}_x \wedge \frac{\underline{\vec{E}}}{c} = \frac{E_0}{c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} \vec{e}_z \, .$$

La moyenne du vecteur de Poynting se calcule directement à partir des champs complexes,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^\star}{\mu_0} \right) \qquad \text{soit} \qquad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{{E_0}^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x \, .$$

> *La relation de structure est linéaire par rapport aux champs : elle peut donc s'utiliser de la même façon avec les champs réels ou les champs complexes. Au contraire, le vecteur de Poynting est relié aux champs de manière non-linéaire. Il n'est donc pas possible de le calculer avec les champs complexes, seule sa valeur moyenne est aisément accessible :*
>
> $$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^\star}{\mu_0} \right) \, .$$
>
> *Ne pas oublier ni le préfacteur 1/2, ni la partie réelle, ni le complexe conjugué !*

2 Raisonnons sur la tranche d'atmosphère représentée figure 7.

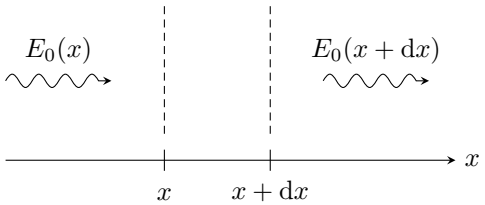


Figure 7 – Schéma de la tranche d'atmosphère considérée.

On suppose raisonner sur des échelles de temps très supérieures à la période de l'onde : on peut donc la considérer en régime permanent.
▷ Par la face située en x, la tranche reçoit une puissance

$$\mathcal{P}_\mathrm{e} = \iint \langle \Pi \rangle \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{E_0(x)^{\,2}}{2\mu_0 c} S \, ,$$

▷ Par la face située en $x + \mathrm{d}x$, la tranche cède une puissance

$$\mathcal{P}_\mathrm{s} = \frac{E_0(x + \mathrm{d}x)^{\,2}}{2\mu_0 c} S \, ,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▷ Enfin, sous l'effet des phénomènes d'absorption et diffusion, il faut compter une perte de puissance

$$\mathcal{P}_{\text{abs}} = P\,S\,\mathrm{d}x = \alpha E_0(x)^2\,S\,\mathrm{d}x\,.$$

Ainsi, en régime permanent,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\text{s}} &= \mathcal{P}_{\text{e}} - \mathcal{P}_{\text{abs}} \\
\frac{E_0(x+\mathrm{d}x)^{\,2}}{2\mu_0 c} &= \frac{E_0(x)^{\,2}}{2\mu_0 c} - \alpha E_0(x)^2\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2\mu_0 c}\left(E_0(x)^2 + \frac{\mathrm{d}(E_0^2)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) &= \frac{E_0(x)^{\,2}}{2\mu_0 c} - \alpha E_0(x)^2\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2\mu_0 c}\frac{\mathrm{d}(E_0^2)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &= -\alpha E_0(x)^2\,\mathrm{d}x \\
\frac{1}{2\mu_0 c}\times 2E_0\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}x} &= -\alpha E_0(x)^2
\end{aligned}$$

d'où on déduit l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}x} + \underbrace{\mu_0 c\alpha}_{=1/\ell}\,E_0 = 0\,.}$$

3 Posons $E_{\text{max}} = E_0(x=0)$ l'amplitude de l'onde lorsqu'elle pénètre dans l'atmosphère. L'équation différentielle précédente se résout en

$$E_0(x) = E_{\text{max}}\,\mathrm{e}^{-x/\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\underline{\vec{E}} = E_{\text{max}}\,\mathrm{e}^{-x/\ell}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\,\vec{e}_y\,.}$$

4 Lorsque le Soleil se couche, il est plus bas sur l'horizon, donc les rayons lumineux traversent une plus grande épaisseur d'atmosphère pour nous parvenir. L'onde est donc **plus atténuée**, ce qui est moins éblouissant pour l'œil.

En ce qui concerne le changement de couleur, on peut supposer que le coefficient α **dépend de la longueur d'onde** : s'il est plus élevé pour les rayonnements de faible longueur d'onde plutôt que de grande longueur d'onde, alors les rayonnements bleus, verts ou jaunes sont plus atténués que les rouges, ce qui explique le changement de couleur apparente du Soleil plus marqué le soir en raison de la longueur d'atmosphère traversée.

> *En réalité, l'absorption du rayonnement est relativement minoritaire car elle est restreinte à certaines longueurs d'onde bien particulières, caractéristiques des espèces chimiques présentes dans l'atmosphère (c'est l'analogue des raies caractéristiques en spectroscopie infrarouge). Le phénomène principal est la diffusion de la lumière par les aérosols (fines particules) présentes dans l'atmosphère, qui se trouve renvoyée dans toutes les directions lorsqu'elle « rencontre » un aérosol. On peut montrer que la puissance diffusée est proportionnelle à $1/\lambda^4$: les rayonnements de petite longueur d'onde y sont plus sensibles que ceux de grande longueur d'onde. C'est donc bien ce qui explique la couleur apparente rouge du Soleil lorsqu'il se couche ... mais aussi la couleur bleue du ciel : lorsque l'on regarde le ciel dans une direction qui n'est pas celle du Soleil, on ne voit évidemment pas les rayonnements qui arrivent en ligne droite depuis le Soleil, mais seulement ceux qui ont largement subi le phénomène de diffusion de la lumière.*

Exercice 15 : Approche énergétique de l'effet de peau

oral banque PT | 3 | 2

▷ *Effet de peau ;*
▷ *Vecteur de Poynting ;*
▷ *Bilan de puissance.*

1 Il s'agit **bien d'une onde plane**, car $\vec{E}$ prend la même valeur en tout point des plans $z = \text{cte}$, mais elle n'est **pas progressive** à cause de l'exponentielle décroissante. Le paramètre α représente à la fois le **vecteur d'onde** et l'**inverse de la longueur d'amortissement** (longueur de peau) de l'onde. L'onde est **polarisée rectilignement** selon $\vec{u}_x$.

2 **Attention !** Pour pouvoir identifier $\overrightarrow{\text{rot}} \leftrightarrow -\mathrm{j}\underline{\vec{k}}\wedge$, il faut écrire l'onde avec un vecteur d'onde complexe, soit

$$\vec{E} = E_0 \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - (1-\mathrm{j})\alpha z\right)\right]\vec{u}_x\,,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

d'où on identifie $\underline{\vec{k}} = (1-\mathrm{j})\alpha\vec{u}_z$. D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$-\mathrm{j}\vec{k}\wedge\vec{E} = -\mathrm{j}\omega\vec{B} \qquad \text{soit} \qquad (1-\mathrm{j})\alpha\vec{u}_z\wedge E_0\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\alpha z)}\vec{u}_x = \omega\vec{B}$$

d'où

$$\boxed{\vec{B} = \frac{(1-\mathrm{j})\alpha E_0}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\alpha z)}\vec{u}_y\,.}$$

3 Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\,.$$

Sa moyenne temporelle vaut

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}^*}{\mu_0}\right).$$

Or

$$\vec{E}\wedge\vec{B}^* = \frac{(1+\mathrm{j})\alpha E_0^{\,2}}{\mu_0\omega}\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\vec{u}_x\wedge\vec{u}_y$$

d'où

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\alpha E_0^{\,2}}{2\mu_0\omega}\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\vec{u}_z\,.}$$

> **Attention !** *Les champs complexes ne donnent accès qu'à la moyenne temporelle. Trouver le vecteur de Poynting instantané exige de revenir aux champ réels.*
>
> *(et bien sûr on peut aussi passer par les champs réels pour trouver $\langle\vec{\Pi}\rangle$)*

4 Puissance moyenne entrant par la face située en z :

$$\langle\mathcal{P}_\mathrm{e}\rangle = \iint\langle\vec{\Pi}(z)\rangle\cdot\mathrm{d}S\,\vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^{\,2}}{2\mu_0\omega}S\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\,.$$

Puissance moyenne sortant par la face située en $z+\mathrm{d}z$:

$$\langle\mathcal{P}_\mathrm{s}\rangle = \iint\langle\vec{\Pi}(z+\mathrm{d}z)\rangle\cdot\mathrm{d}S\,\vec{u}_z = \frac{\alpha E_0^{\,2}}{2\mu_0\omega}S\,\mathrm{e}^{-2\alpha(z+\mathrm{d}z)}\,.$$

La puissance entrant dans le conducteur mais n'en sortant pas est cédée au conducteur. Ainsi,

$$\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \mathcal{P}_\mathrm{e}-\mathcal{P}_\mathrm{s} = \frac{\alpha E_0^{\,2}}{2\mu_0\omega}S\left(\mathrm{e}^{-2\alpha z}-\mathrm{e}^{-2\alpha(z+\mathrm{d}z)}\right).$$

En utilisant un développement limité

$$\mathrm{e}^{-2\alpha z}-\mathrm{e}^{-2\alpha(z+\mathrm{d}z)} \simeq 2\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\,\mathrm{d}z\,,$$

on obtient

$$\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \frac{\alpha E_0^{\,2}}{2\mu_0\omega}S\times 2\alpha\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\,\mathrm{d}z$$

et finalement

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \frac{\alpha^2 E_0^{\,2}}{\mu_0\omega}S\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\,\mathrm{d}z\,.}$$

5 La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_{\mathrm{J,vol}} = \gamma E^2$ donc en moyenne et sur la tranche de volume $S\,\mathrm{d}z$,

$$\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\gamma\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right)S\,\mathrm{d}z$$

soit

$$\boxed{\langle\mathcal{P}_\mathrm{J}\rangle = \frac{\gamma E_0^{\,2}}{2}\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}S\,\mathrm{d}z\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

6 Par identification,

$$\frac{\alpha^2 {E_0}^2}{\mu_0\omega} S\,\mathrm{e}^{-2\alpha z}\mathrm{d}z = \frac{\gamma {E_0}^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2\alpha z} S\,\mathrm{d}z\,,$$

soit en simplifiant

$$\frac{\alpha^2}{\mu_0\omega} = \frac{\gamma}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}\,.$$

La longueur de peau $\delta = 1/\alpha$ s'écrit finalement

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}\,.}$$

Exercice 16 : Guide d'ondes rectangulaire

exemple officiel banque PT | 2 | 3

▷ *Relation de dispersion ;*
▷ *Vecteur de Poynting.*

1 L'onde proposée est **harmonique**, **progressive** dans le sens des z croissants ... mais elle n'est **pas plane**, car le champ électrique n'est pas uniforme dans un plan $z = \text{cte}$.

2 L'équation de d'Alembert s'écrit

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}\,.}$$

3 Les dérivées du champ proposé s'écrivent

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = \frac{n\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x \qquad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} = +kE_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{e}_x \qquad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = -k^2E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{e}_x \qquad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_x$$

En insérant ces expressions dans l'équation de d'Alembert, il vient

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) - k^2E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) + \frac{\omega^2}{c^2}E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz) = 0$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0\,.}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\,.$$

La propagation n'est possible que si k est réel, donc $k^2 > 0$. On en déduit que le guide ne conduit l'onde que si la pulsation est telle que

$$\boxed{\omega > \frac{n\pi c}{a}\,.}$$

Il réalise donc un **filtrage passe-haut**.

4 D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

avec pour l'onde étudiée

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}E_x\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}\\ -\frac{\partial E_x}{\partial y}\end{bmatrix}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

d'où

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = +kE_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{e}_y - \frac{n\pi}{a}E_0\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_z$$

d'où on déduit par intégration

$$\boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega}E_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\,\vec{e}_y + \frac{n\pi}{\omega a}E_0\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin(\omega t - kz)\,\vec{e}_z\,,}$$

en choisissant nulle la constante d'intégration qui ne décrit pas un phénomène ondulatoire.

> *Rappelons que la relation de structure ne s'applique qu'aux ondes planes progressives ... mais ici l'onde n'est pas plane, il faut donc revenir à l'équation de Maxwell-Faraday pour calculer le champ magnétique.*
>
> *Même chose pour la relation de dispersion : il faut renoncer à la tentation de remplacer k/ω par c comme on le ferait pour une OPPH !*
>
> *On constate que $\vec{B}$ n'est pas orthogonal à la direction de propagation : bien que l'onde se propage dans le vide, la présence du guide métallique modifie sa structure en profondeur. L'onde est ici qualifiée de « Transverse Électrique » (TE), par opposition aux ondes « Transverses Électro-Magnétique » (TEM) qui se propagent dans le vide illimité.*

Le vecteur de Poynting est défini par

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\,.$$

Ici, il a donc deux composantes sur $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_y$, avec

$$\Pi_z = \frac{1}{\mu_0}\times E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\times\frac{k}{\omega}E_0\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos(\omega t - kz)$$

$$\boxed{\Pi_z = \frac{k}{\mu_0\omega}{E_0}^2\sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\cos^2(\omega t - kz)\,.}$$

La puissance moyenne transportée au travers d'une section du guide de normale $\vec{e}_z$ vaut

$$\mathcal{P} = \iint_{\text{section}}\langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{\text{section}}\langle\Pi_z\rangle\,\mathrm{d}S$$

avec ici

$$\langle\Pi_z\rangle = \frac{k}{2\mu_0\omega}{E_0}^2\sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{k}{2\mu_0\omega}{E_0}^2\times\int_0^b\mathrm{d}x\times\int_0^a\sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{k}{2\mu_0\omega}{E_0}^2\times b\times\frac{a}{2}\\ \boxed{\mathcal{P} &= \frac{k}{4\mu_0\omega}{E_0}^2 S\,.}\end{aligned}$$

5 L'énoncé ne le dit pas clairement, mais on peut supposer que l'onde est émise dans le vide avant d'entrer dans le guide d'onde. Sa pulsation vaut donc

$$\omega = k_0 c = \frac{2\pi c}{\lambda}\,.$$

D'après la question 3, l'onde se propage si

$$\omega > \frac{n\pi c}{a}\qquad\text{soit}\qquad\frac{2\pi c}{\lambda} > \frac{1\times\pi c}{3\lambda/4} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi c}{\lambda}$$

ce qui est évidemment vrai. On en déduit que le mode $n = 1$ se propage dans le guide. On a alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{1\times\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi}{3\lambda}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{4\pi\times\omega}{3\times 2\pi c}\right)^2 = \left(1 - \frac{2^2}{3^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{9}\,\frac{\omega^2}{c^2}$$

On en déduit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{3c}{\sqrt{5}}\,,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

ce qui permet de déterminer (enfin !) l'amplitude E_0

$$E_0 = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{S} \times \mathcal{P}} = \sqrt{4\mu_0 \times \frac{3c}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\lambda^2} \times \mathcal{P}} = \frac{4}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}\mu_0 c\mathcal{P}}$$

Avec la relation de dispersion dans le vide, on trouve $\lambda = c/f = 3\,\text{cm}$, et ainsi

$$\boxed{E_0 = 2{,}3 \cdot 10^3\,\text{V}\cdot\text{m}^{-1}\,.}$$

Problème ouvert

Exercice 17 : Rail gun

adapté oral Centrale PSI | 3 | 2

▷ *Problème ouvert.*

> *Voir ici : `http://www.liberation.fr/planete/2010/12/17/le-railgun-le-giga-canon-de-la-navy_701446`*

Raisonnons par analogie avec les rails de Laplace en négligeant tous les frottements. Les notations sont présentées figure 8.

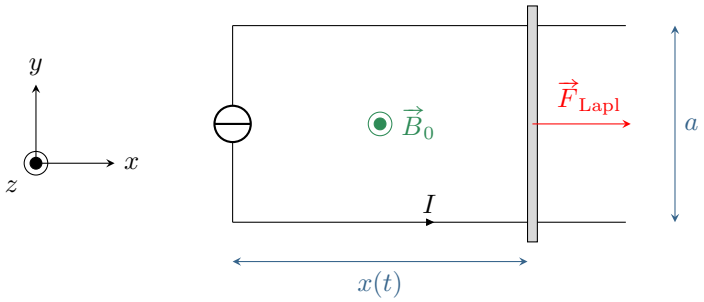


Figure 8 – Notations pour l'étude du rail gun.

Le champ susceptible de mettre en mouvement le projectile est nécessairement le champ créé par le circuit lui-même. Pour faire simple, on néglige les phénomènes d'induction : on considère que le courant est constamment égal au courant maximal que la source peut délivrer. Le champ créé par un rail peut être modélisé par celui d'un fil infini, parcouru par un courant d'intensité I :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, r}\,\vec{u}_\theta$$

(se retrouve en 30 secondes avec le théorème d'Ampère). Pour estimer le champ total, faisons l'hypothèse qu'il est uniforme sur le projectile, et calculons sa valeur en $y = a/2$. Les champs créés par les deux rails se superposent, et compte des orientations sont dirigés tous les deux selon $+\vec{u}_z$, si bien que

$$\vec{B} = 2 \times \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, a/2}\,\vec{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}\,\vec{u}_z\,.$$

Numériquement, on trouve $B \simeq 8\,\text{T}$.

Une fois ce champ déterminé, calculons la vitesse de sortie. Plus précisément, on ne s'intéresse qu'à la norme v_s de la vitesse en sortie du guide, le plus simple est donc d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

▷ Système : projectile ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des actions mécaniques :
- → en première approche, on néglige tous les frottements ;
- → le mouvement du projectile est horizontal, son poids est donc compensé par une force de réaction normale ;
- → la force de Laplace vaut $\vec{F}_\text{L} = I(a\,\vec{e}_y) \wedge (B\,\vec{e}_z) = IaB\,\vec{e}_x$, il s'agit d'une force motrice constante, son travail au cours du déplacement du projectile sur toute la longueur L des rails vaut donc

$$W_\text{L} = IaB\,L\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▷ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{s}}^2 - 0 = W \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}m{v_\mathrm{s}}^2 = IaB\,L\,.$$

et finalement

$$v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2IaB\,L}{m}} = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

ce qui est dix fois supérieur à la vitesse du son. En pratique, les frottements divisent cette vitesse de sortie par environ 2.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr