Préparation à l'oral — ***Correction***

Mécanique

Théorèmes généraux

Exercice 1 : Parabole de sûreté — 2 | 2

- *Principe fondamental de la dynamique ;*
- *Chute libre.*

1 Cf. cours de terminale : partant du point de coordonnées (0,0,0),

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}$$

2 Lorsque le balle touche le sol, $z(t) = 0$, ce qui est le cas à l'instant $t = 0$ (au départ) et à l'instant

$$t' = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

après une distance parcourue

$$d = x(t') = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha\,\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)\,.$$

Ainsi, le maximum est atteint pour $\alpha = \pi/4$ et on a

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\,.$$

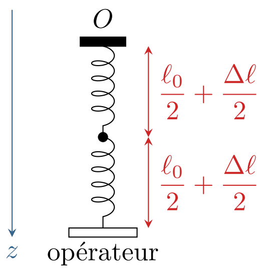
3 On peut refaire un calcul analogue, en calculant l'instant $t_{\max}$ auquel z est maximal, puis l'angle α qui maximise $z(t_{\max})$. La hauteur atteinte est maximale si le boulet est lancé à la verticale, et on a alors

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

CORRIGÉ À FINIR

Exercice 2 : Deux ressorts à la verticale — oral banque PT | 3 | 2

- *Force d'un ressort ;*
- *Théorème de la résultante cinétique.*



1 Question bien compliquée pour commencer ! Considérons un ressort complet fixé à une de ses extrémités et une masse m très faible fixée au milieu. Un opérateur tire sur le ressort en lui donnant un allongement $\Delta\ell$. La force exercée par le ressort sur l'opérateur vaut

$$\vec{F} = +k\Delta\ell\vec{u}_z$$

Comme la force exercée par le ressort est opposée aux deux extrémités [1], on en déduit que la force exercée par le demi-ressort sur la petite masse vaut

$$\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u}_z$$

1. Démontrable en appliquant successivement le principe des actions réciproques, le PFD au ressort, et à nouveau le principe des

Cependant, l'allongement du demi-ressort n'est que $\Delta\ell/2$, la forme appropriée pour écrire la force est donc

$$\vec{F} = -2k\,\frac{\Delta\ell}{2}\,\vec{u}_z$$

ce qui permet d'identifier **la raideur du demi-ressort au double de la raideur du ressort complet.**

2 On raisonne sur l'axe z orienté vers le bas. Raisonnons à l'équilibre : les forces exercées sur chacune des masses se compensent.

▷ La masse m_1 est soumise à
→ son poids $\vec{P}_1 = +m_1 g\vec{u}_z$;
→ la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_{\mathrm{r}1} = -k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}}\,\vec{u}_z$;
→ le force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_{\mathrm{r},2\to1} = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}(-\vec{u}_z) = k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\,\vec{u}_z$.
Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_1 g - k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0$$

▷ La masse m_2 est soumise à
→ son poids $\vec{P}_2 = +m_2 g\vec{u}_z$;
→ AUCUNE force de la part du ressort 1 puisqu'il n'est pas attaché à m_2 ;
→ la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{\mathrm{r},2\to2} = -k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}}\vec{u}_z$.
Ainsi, en projection sur l'axe z,

$$m_2 g - k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = 0\,.$$

▷ On en conclut

$$\boxed{\Delta\ell_{2,\text{éq}} = \frac{m_2 g}{k_2}}$$

puis

$$k_1\,\Delta\ell_{1,\text{éq}} = m_1 g + k_2\,\Delta\ell_{2,\text{éq}} = (m_1+m_2)g \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\ell_{1,\text{éq}} = \frac{(m_1+m_2)g}{k_1}\,.}$$

3 Comme l'axe z est orienté vers le bas et que les positions sont comptées par rapport à la position d'équilibre, alors

$$\boxed{\Delta\ell_1 = \Delta\ell_{1,\text{éq}} + z_1 \qquad \text{et} \qquad \Delta\ell_2 = \Delta\ell_{2,\text{éq}} - z_1 + z_2\,.}$$

> *Ces expressions se trouvent à partir du schéma ! Augmenter z_1 à z_2 fixé augmente l'allongement du ressort 1 et diminue celui du ressort 2. Augmenter z_2 à z_1 fixé n'a pas d'effet sur le ressort 1 et augmente l'allongement du ressort 2.*

De plus, les accélérations des masses m_1 et m_2 s'écrivent directement $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2}$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2}$ car tous les autres termes de leur position sont des constantes. Ainsi, le même bilan de forces que précédemment et le PFD conduisent aux équations différentielles

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - k_1\,\Delta\ell_1 + k_2\,\Delta\ell_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - k_2\,\Delta\ell_2\,.$$

En remplaçant les allongements par leurs expressions,

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} = m_1 g - (m_1+m_2)g - k_1 z_1 + m_2 g - k_2 z_1 + k_2 z_2 \qquad \text{et} \qquad m_2\frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} = m_2 g - m_2 g + k_2 z_1 - k_2 z_2$$

et enfin en simplifiant

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 = \frac{k_2}{m_1}z_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_2}{m_2}z_2 = \frac{k_2}{m_2}z_1\,.}$$

> *Il est logique que tous les termes issus du poids se compensent : comme le poids est une force constante, il a un impact sur les positions d'équilibre mais pas sur les oscillations autour de ces positions.*

4 La masse m_2 est maintenue dans sa position d'équilibre, donc $z_2 = 0$. L'équation du mouvement de m_1 devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}z_1 = 0\,.$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m_1}}$. Même si la question n'est pas claire, je présume quand même qu'une résolution est attendue.

actions réciproques.

▷ *Forme générale des solutions :* l'équation est homogène, donc la solution particulière est nulle, et

$$z_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes.}$$

▷ *Conditions initiales :* on a directement $z_1(0) = Z_\mathrm{d}$ et $\dot z_1(0) = 0$.

▷ *Détermination des constantes :* sur la position,

$$z_1(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} Z_\mathrm{d}$$

et sur la vitesse

$$\dot z_1(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

donc

$$\dot z_1(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sol}}}{=} B\omega_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \qquad \text{d'où} \qquad B = 0\,.$$

▷ *Conclusion :*

$$\boxed{z_1(t) = Z_\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)\,.}$$

5 Bonne question ! Sauf erreur de ma part, la question 1 n'a aucune utilité pour résoudre la question 2. La méthode de démonstration se ressemble ?

Exercice 3 : Anneau sur une tige en rotation

2 | 2

▷ *Coordonnées polaires ;*
▷ *Réaction du support ;*
▷ *Force exercée par un ressort.*

1 Le mouvement est à vitesse angualire constante, donc

$$\vec r = \dot r\,\vec e_r + r\omega\,\vec e_\theta \qquad \text{et} \qquad \vec a = (\ddot r - \omega^2 r)\,\vec e_r + 2\omega\,\dot r\,\vec e_\theta\,.$$

L'anneau est soumis à
- ▷ son poids $\vec P = m\vec g = -mg\vec u_z$;
- ▷ la réaction de la tige $\vec R = R_\theta\,\vec u_\theta + R_z\,\vec u_z$ car aucun frottement.

D'après le PFD appliqué à l'anneau projeté sur $\vec e_r$,

$$m(\ddot r - \omega^2 r) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot r - \omega^2 r = 0\,.}$$

2 Le polynôme caractéristique admet comme racines $\pm\omega$, d'où

$$r(t) = A\,\mathrm{e}^{+\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega t}\,.$$

À l'instant initial,

$$\begin{cases} r(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} r_0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} A + B \\ \dot r(0) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow\\ \text{expr}}}{=} \omega A - B\omega \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad A = B = \frac{r_0}{2}\,.$$

Ainsi,

$$r(t) = r_0\cosh(\omega t) \qquad \text{et} \qquad r(\theta) = r_0\cosh\theta\,.$$

La trajectoire est une spirale exponentielle.

3 Il faut ajouter au PFD la force de rappel du ressort, soit

$$m(\ddot r - \omega^2 r) = -k(r - \ell_0) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ddot r + ({\omega_0}^2 - \omega^2) r = {\omega_0}^2\ell_0\,.}$$

Si ${\omega_0}^2 - \omega^2 > 0$ l'anneau oscille le long de la tige, sinon il a de nouveau une trajectoire en spirale exponentielle divergente, la divergence étant simplement ralentie.

4 Le mouvement de l'anneau est périodique si la période des oscillations le long de la tige est commensurable à la période de rotation, c'est-à-dire s'il existe N et N' tels que

$$N\frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \omega^2}} = N'\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{soit} \qquad {\omega_0}^2 = \left(1 + \frac{N^2}{N'^2}\right)\omega^2\,.$$

Exercice 4 : Balle de golf dans un looping

oral banque PT | 2 | 2 |

▷ *Conservation de l'énergie mécanique ;*
▷ *Décollement d'un support ;*
▷ *Chute libre.*

On choisit l'origine du repère au centre du demi-cylindre, et θ compté à partir de l'horizontale, la balle entre donc dans le looping en $\theta = -\pi/2$.

1 Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{init}}}{=} \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cylindre}}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v^2 = {v_0}^2 - 2gR(1+\sin\theta)\,.}$$

2 Il ne faut pas que la vitesse s'annule, donc

$$v_0 > 2\sqrt{gR}\,.$$

3 Accélération dans un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

Projection du poids :

$$\vec{P} = mg(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Projection du PFD sur $\vec{e}_r$:

$$-mR\dot\theta^2 = -mg\sin\theta - N\,.$$

Or avec la conservation de l'énergie (cf. 1ère question) :

$$R\dot\theta^2 = \frac{{v_0}^2}{R} - 2g(1+\sin\theta)$$

ce qui donne

$$-\frac{m{v_0}^2}{R} + 2mg(1+\sin\theta) = -mg\sin\theta - N$$

et enfin

$$N = \frac{m{v_0}^2}{R} - mg(2+3\sin\theta)$$

4 $N > 0$ partout donc ${v_0}^2 > 5gR$

5 Conservation de l'énergie :

$$E_\mathrm{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{init}}}{=} \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sortie}}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + mgR \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_\mathrm{s}^2 = {v_0}^2 - 4gR\,.}$$

6 Chute libre :

$$\begin{cases} \ddot x = 0 \\ \ddot z = -g \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \dot x = -v_\mathrm{s} \\ \dot z = -gt \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x = -v_\mathrm{s}t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + R \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire :

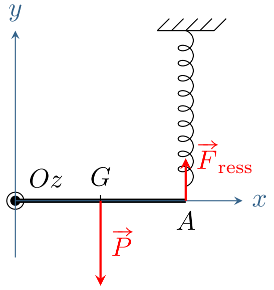
$$z(x) = R - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2 - 4gR}\,.$$

On cherche alors x tel que

$$z(x) = -R \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2 - 4gR} = 2R \qquad \text{d'où} \qquad x = -\sqrt{\frac{4R({v_0}^2 - 4gR)}{g}}$$

Exercice 5 : Barre fixée à ses extrémités — oral CCINP MP | 2 | 2 |

Attention ! Sur tous les dessins, la base doit absolument être dessinée **directe** pour que les produits vectoriels s'expriment correctement.



1 On étudie la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

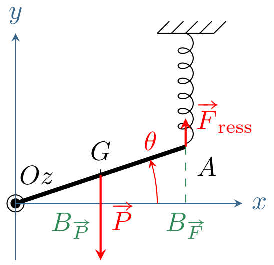
$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a\,.$$

Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}\,.}$$



2 On suppose maintenant la barre inclinée d'un angle θ.

Attention ! L'angle doit absolument être dessiné positif pour que les signes soient corrects.

Méthode 1 : conservation de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique de la barre vaut

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m a^2 \dot{\theta}^2\,.$$

Son énergie potentielle compte deux contributions, celle de pesanteur et celle élastique.

$$E_{\text{pp}} = mgy_G = mga\sin\theta \simeq mga\theta$$
$$E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k\left(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0\right)^2 \simeq \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k} - 2a\theta\right)^2$$

en remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression. Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{c}} + E_{\text{pp}} + E_{\text{pe}}\right) = 0$$

soit

$$\frac{2}{3} m a^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\dot{\theta} + \frac{1}{2}k \times 2\left(2a\theta - \frac{mg}{2k}\right) 2a\dot{\theta} = 0$$

ce qui conduit en simplifiant par $\dot{\theta}$ à

$$\frac{4}{3} m a^2 \ddot{\theta} + 4ka^2\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Méthode 2 : théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\vec{P}} = -mga\cos\theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\vec{F}} = +k(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0) \times 2a\cos\theta \simeq +2ka(\ell_{\text{éq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0\right) = mga - 4ka^2\theta$$

Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$I_z\ddot\theta = -mga + mga - 4ka^2\theta \qquad \text{donc} \qquad \ddot\theta + \frac{4ka^2}{I_z}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot\theta + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

Exercice 6 : Régulateur d'Archereau-Foucault

2 | 1

- ▷ *Solide en rotation ;*
- ▷ *Force de liaison.*

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

1 Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie « libre » que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Ceux encore enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire ω, leur vitesse vaut donc $R\omega$. Le point d'attache entre le contrepoids P et le fil se déplace lui à la vitesse $\dot z$ de P. Ainsi,

$$\boxed{\dot z = R\omega\,.}$$

2 Considérons comme système le point matériel P. Il est soumis à son poids $m\vec g$ et à la force de tension du fil $\vec{T'}$, verticale et vers le haut. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\ddot z\vec u_z = mg\vec u_z + \vec{T'} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{T'} = m(\ddot z - g)\vec u_z\,.$$

D'après le principe des actions réciproques, le contrepoids P exerce sur le fil une force $-\vec{T'}$. Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en I la même force $-\vec{T'} = \vec T$ par définition. Ainsi,

$$\boxed{\vec T = m(g - \ddot z)\vec u_z\,.}$$

3

▷ Système : le cylindre, solide de moment d'inertie J_x ;

▷ Bilan des actions mécaniques :

- → la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe Ox ;
- → les frottements avec l'air exercent un couple $\Gamma_\text{f} = -\lambda\omega$;
- → la force $\vec T$, de bras de levier R, a un moment non nul qui vaut $+TR$ car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct.

Comme le moment cinétique du cylindre par rapport à Ox vaut $J_x\omega$, on a d'après le théorème du moment cinétique

$$J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + m(g - \ddot z)R$$

Or d'après la première question $\ddot z = R\dot\omega$, donc

$$J_x\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\lambda\omega + mgR - mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{(J_x + mR^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \lambda\omega = mgR\,.}$$

4 Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2}\,,$$

faisant apparaître un temps caractéristique

$$\tau = \frac{J_x + mR^2}{\lambda} \,.$$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_\mathrm{p} = \frac{mgR}{\lambda} \,,$$

et la forme générale des solutions est

$$\omega(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \omega_\mathrm{p} \,,$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de 5τ, la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à ω_p : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre**.

Particules chargées, satellites et planètes

Exercice 7 : Cyclotron

inspiré CCP PC 2014 et oral banque PT | 2 | 2

▷ *Mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique.*

- ▷ Système : un proton, assimilé à un point matériel de masse m et charge q.
- ▷ Référentiel : lié au cyclotron, donc a priori le référentiel terrestre, en bonne approximation galiléen.
- ▷ Bilan des forces : le proton n'est soumis qu'à la force de Lorentz (qui diffère en fonction des zones), devant laquelle le poids est négligeable.

1 À l'intérieur des dees seule la force magnétique $\vec{F}_B = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = e(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \qquad \text{soit} \qquad mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \,.}$$

2 La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage polaire, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\vec{a} = e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique d'un tel mouvement,

$$m\left(-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r\right) = e\,v\,B(-\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z) = -e\,v\,B\vec{e}_r$$

en utilisant $\vec{v} = -v\vec{e}_\theta$: la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton, résultat que vous pouvez ou bien connaître ou bien retrouver ici à partir de la cohérence des signes. Finalement,

$$\frac{m\,v^2}{R} = e\,v\,B \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{R = \frac{mv}{eB} \,.}$$

La trajectoire dans un dee est un demi-cercle de longueur πR, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_\mathrm{d} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22\,\mathrm{ns} \,.}$$

On remarque que Δt_d ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué au dee (et évidemment de caractéristiques intrinsèques du proton, e et m).

3 Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les dees, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 et selon $-\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_1 à D_2. En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les dees ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_d, soit pour la période

$$T = 2\Delta t_\mathrm{d} = \frac{2\pi m}{eB} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23\,\mathrm{MHz} \,.}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les dees soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

4 Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les dees, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un dee et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à U_m. Sous ces hypothèses, on trouve

$$\frac{1}{2}m{v_{n+1}}^2 - \frac{1}{2}m{v_n}^2 = W(\overrightarrow{F_E}) = e\frac{U_\mathrm{m}}{a}a$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \simeq \frac{1}{2}m{v_n}^2 = neU_\mathrm{m} \qquad \text{soit} \qquad v_n = \sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2neU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_\mathrm{m}}{B^2e}}}$$

5 Remarquons bien que n compte le nombre de passage dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de n à $n+2$. Après un tour, $n=2$ et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_\mathrm{m}}{m}} \qquad \text{et} \qquad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_\mathrm{m}}{eB^2}} = 6{,}1\,\mathrm{cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}\,R_2 = 19\,\mathrm{cm}}$$

6 Avec $R_\mathrm{N} = 35\,\mathrm{cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_\mathrm{fin} = \frac{eBR_N}{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{E_\mathrm{c,fin} = \frac{e^2B^2{R_N}^2}{2m} = 2{,}1\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 14\,\mathrm{MeV}}$$

puis

$$E_\mathrm{c,fin} = NeU_\mathrm{m} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{N = \frac{E_\mathrm{c,fin}}{eU_\mathrm{m}} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.

Exercice 8 : Orbite de transfert de Hohmann

2 | 2 |

- *Conservation du moment cinétique ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Énergie mécanique.*

1 Étudions dans le référentiel géocentrique le mouvement du satellite sur une orbite circulaire de rayon r. Il n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre de masse m_0. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\,\overrightarrow{e}_r\cdot v\,\overrightarrow{e}_\theta = 0 \qquad \text{d'où} \qquad v = \mathrm{cte}\,,$$

le mouvement est donc uniforme. D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e}_r \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e}_r = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

En projetant et en simplifiant, on en déduit

$$\frac{v^2}{r} = \mathcal{G}\frac{m_0}{r^2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{r}}\,.}$$

> *Rappelons que l'accélération d'un point matériel en mouvement circulaire uniforme est purement centripète et vaut*
> $$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\vec{e}_r\,.$$
> *C'est un résultat à connaître et utilisable sans démonstration.*

On en déduit
$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2} m \frac{m_0 \mathcal{G}}{r} - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r}\,.}$$

> *Trouver $E_m < 0$ est normal car le satellite est dans un état lié.*

2 On constate sur la figure que le grand-axe de l'orbite de transfert vaut
$$2a = r_1 + r_2\,.$$

Ainsi,
$$E_\mathrm{m1} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_1} \qquad E'_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} \qquad \boxed{E_\mathrm{m2} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_2}\,.}$$

Le travail fourni par le moteur pour le passage sur l'orbite de transfert est égale à la différence d'énergie mécanique pour un rayon r_1,
$$W_1 = E'_\mathrm{m} - E_\mathrm{m1} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} + \mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_1} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)$$

et finalement
$$\boxed{W_1 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)}\,.}$$

De même,
$$W_2 = E_\mathrm{m2} - E'_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_2} + \mathcal{G}\frac{m_0 m}{r_1 + r_2} = \mathcal{G} m_0 m \left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_2}\right)$$

et finalement
$$\boxed{W_2 = \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}\,.}$$

3 La variation d'énergie mécanique se fait à $r = r_1$, donc sans variation d'énergie potentielle, mais uniquement en modifiant l'énergie cinétique. Ainsi,
$$W_1 = \frac{1}{2} m {v'_1}^2 - \frac{1}{2} m {v_1}^2 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathcal{G} m_0 m (r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} = \frac{1}{2} m {v'_1}^2 - \mathcal{G}\frac{m_0 m}{2r_1}$$

ce qui donne
$${v'_1}^2 = \mathcal{G} m_0 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1(r_1 + r_2)} + \frac{1}{r_1}\right) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{v'_1 = \sqrt{\frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)}\mathcal{G} m_0}\,.}$$

4 Appliquons le théorème du moment cinétique au satellite, par rapport au centre O de la Terre,
$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t}\right|_\mathcal{R} = (r\,\vec{e}_r) \wedge \left(-\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\,\vec{e}_r\right) = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{cte}}\,.$$

Or par définition du moment cinétique, exprimé en coordonnées polaires,
$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = r\,\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e}_z\,.$$

La conservation du moment cinétique au cours du mouvement implique donc la conservation de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.

5 Par définition, l'apogée et le périgée correspondent aux positions de rayon extrêmal, donc en ces points $\dot{r} = 0$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. Ainsi, la constante des aires écrite au périgée et à l'apogée donne
$$C = r_1 v'_1 = r_2 v'_2 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v'_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1\,.}$$

Exercice 9 : Frottements sur un satellite en orbite basse

oral banque PT | 2 | 2

- ▷ *Conservation du moment cinétique ;*
- ▷ *Orbite circulaire ;*
- ▷ *Énergie mécanique.*

Travaillons en coordonnées cylindriques dont l'origine O se trouve au centre de la Terre et d'axe (Oz) normal au plan de la trajectoire.

1 La force de gravitation subie par le satellite vaut

$$\overrightarrow{F} = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

donc son moment par rapport au centre O est

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

car $\overrightarrow{OS} = r\,\overrightarrow{e}_r$ et $\overrightarrow{F}$ sont colinéaires. D'après le théorème du moment cinétique appliqué au satellite S dans le référentiel géocentrique supposé galiléne,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{0} \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{\text{cte}}\,.$$

Exprimons $\overrightarrow{L}_O$ dans la base cylindrique :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OS} \wedge m\overrightarrow{v} = r\,\overrightarrow{e}_r \wedge r\omega\,\overrightarrow{e}_\theta = r^2\omega\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

La conservation du moment cinétique permet donc de conclure que

$$\boxed{\mathcal{C} = r^2\omega = \text{cte}\,.}$$

La vitesse en orbite circulaire s'écrit

$$v = r\omega = \frac{\mathcal{C}}{r} = \text{cte}$$

car $r = \text{cte}$. Le mouvement est donc effectivement **uniforme**.

2 Appliquons le théorème de la résultante cinétique au satellite, en orbite circulaire uniforme autour de la Terre :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F} \qquad \text{soit} \qquad -m\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e}_r = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{e}_r\,.$$

> *Vous devez connaître et pouvez directement utiliser l'expression $\overrightarrow{a} = -v^2/r\,\overrightarrow{e}_r$ pour un mouvement circulaire uniforme ... mais attention, elle ne se généralise à aucun autre mouvement !*

On en déduit directement

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{MG}{r}}\,.}$$

Pour l'orbite d'altitude $h = 1\cdot 10^3\,\mathrm{km}$, on a

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{MG}{R+h}} = 7{,}4\cdot 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 27\cdot 10^3\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.}$$

3 L'énergie potentielle du satellite est purement gravitationnelle et vaut

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r}\,.$$

L'énergie cinétique est

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{soit} \qquad E_\mathrm{c} = \frac{mMG}{2r}\,.$$

L'énergie mécanique vaut donc

$$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \frac{mMG}{2r} - G\frac{mM}{r} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{E_\mathrm{m} = -\frac{mMG}{2r}\,.}$$

4 La puissance de la force de frottements $\overrightarrow{f}$ est

$$\mathcal{P}_f = \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v} = -\lambda m v^3 = -\lambda m\left(\frac{MG}{r}\right)^{3/2}\,.$$

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on a donc

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_f \qquad \text{soit} \qquad -\frac{mMG}{2}\times\frac{-1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\lambda m\left(\frac{MG}{r}\right)\sqrt{\frac{MG}{r}}\,,$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -2\lambda\sqrt{MG}\sqrt{r}\,.}$$

5 On constate sur l'équation différentielle précédente que $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ est toujours négatif. Le rayon de l'orbite diminue donc sous l'effet des frottements. En revanche, d'après la question 2, si le rayon de l'orbite diminue alors la vitesse du satellite augmente. Ainsi, **les frottements ont pour effet d'augmenter la vitesse du satellite**, ce qui est innattendu.

6 En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\int_{R+h}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{2\sqrt{r}} = -\lambda\sqrt{MG}\int_0^t \mathrm{d}t \qquad \text{d'où} \qquad \sqrt{r(t)} - \sqrt{R+h} = -\lambda t\sqrt{MG}$$

soit finalement

$$\boxed{r(t) = \left(\sqrt{R+h} - \lambda t\sqrt{MG}\right)^2\,.}$$

L'altitude du satellite diminue de $\Delta h = 2\,\mathrm{m}$ pendant la durée $\Delta t = 1$ jour $= 8{,}6\cdot 10^4\,\mathrm{s}$. Ainsi,

$$\sqrt{R+h-\Delta h} - \sqrt{R+h} = -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}$$

Comme $\Delta h \ll R+h$, un développement limité est justifié et donne

$$\begin{aligned}
\sqrt{R+h}\left(1-\frac{\Delta h}{R+h}\right)^{1/2} - \sqrt{R+h} &= -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}\\
\sqrt{R+h}\left(1-\frac{\Delta h}{2(R+h)}\right) - \sqrt{R+h} &= -\lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}\\
\frac{\Delta h}{2\sqrt{R+h}} &= \lambda\,\Delta t\,\sqrt{MG}
\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\boxed{\lambda = \frac{\Delta h}{2\,\Delta t\sqrt{MG(R+h)}} = 2{,}1\cdot 10^{-16}\,\mathrm{m}^{-1}\,.}$$

Je ne pense pas que le développement limité soit attendu spontanément par le jury, cependant il est indispensable pour la cohérence des chiffres significatifs dans les applications numériques.

Pour aboutir à ce résultat, il est également possible de raisonner directement sur l'équation différentielle en approximant que sur un jour la dérivée temporelle est quasi-constante et vaut

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \simeq -\frac{\Delta h}{\Delta t} = -2\lambda\sqrt{MG}\sqrt{R+h}$$

ce qui conduit bien au même résultat.

Problèmes ouverts

Exercice 10 : Chariot à niveau constant 3 | 1

▷ *Problème ouvert.*

Supposons que le distributeur porte N plateaux, tous d'épaisseur $e = 1\,\mathrm{cm}$ et de masse $m = 200\,\mathrm{g}$. Quelle que soit la valeur de N, le sommet de la pile de plateaux se trouve $h = 10\,\mathrm{cm}$ sous le point d'attache des deux ressorts. On néglige le poids du support à plateaux devant celui des plateaux. Comme les plateaux sont évidemment immobiles (...) alors la force exercée par les deux ressorts doit compenser le poids des plateaux, ce qui se traduit par

$$2k(Ne + h - \ell_0) = Nmg \qquad \text{soit} \qquad 2k(h - \ell_0) + N(2ke - mg) = 0$$

Cette condition devant être vérifiée pour toute valeur de N, on en déduit les deux égalités

$$\begin{cases} 2k(h-\ell_0) = 0 \\ 2ke - mg = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\begin{cases} \ell_0 = h = 10\,\mathrm{cm} \\ k = \dfrac{mg}{2e} = 100\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \end{cases}}$$

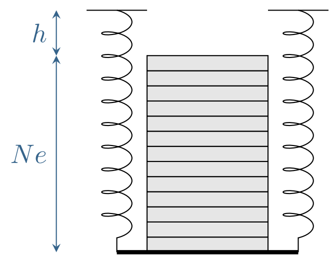


Figure 1 – Distributeur de plateaux.

> *Pour identifier le système d'équations, on peut également raisonner d'abord sur le cas $N = 0$ qui donne la première équation du système, puis simplifier l'équation issue du PFD, et en déduire la deuxième équation du système.*

Exercice 11 : Sieste en hamac 3 | 1

▷ *Problème ouvert.*

- **Modélisation**

Pour faire simple, je te modélise par un point matériel de masse m suspendu par des cordes de même longueur, supposées inextensibles et tendues. Une modélisation par un solide indéformable ne changerait qualitativement rien. Le dispositif est donc symétrique, voir figure 2. Pour minimiser le risque que les cordes cassent, il faut minimiser leur force de tension, c'est-à-dire qu'il faut trouver la valeur de α qui minimise la norme de $\vec{T}$ et $\vec{T'}$, que je note plus simplement T et T'.

- **Mise en équation**

Tu es le système en « mouvement » dans le référentiel terrestre, qu'on peut considérer galiléen. On y fixe un repère (Oxy). Tu es soumis à
▷ ton poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;
▷ la force de tension $\vec{T} = T(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
▷ la force de tension $\vec{T'} = T'(-\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)$;
Par application du théorème de la résultante cinétique, on a vectoriellement puis en projection

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} (T - T')\cos\alpha = 0 \\ -mg + (T + T')\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

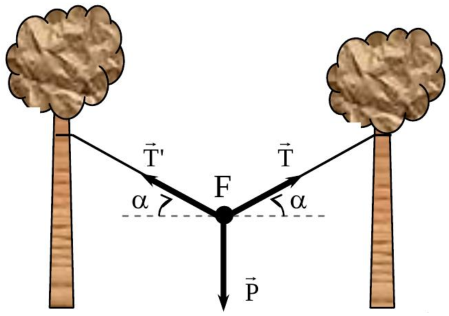


Figure 2 – Un point matériel en train de faire la sieste dans son hamac.

On en déduit finalement que $T' = T$, ce dont on pouvait se douter vue la symétrie des cordes, et

$$2T\sin\alpha = mg \qquad \text{d'où} \qquad T = T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

La tension des cordes est d'autant plus faible que $\sin\alpha$ est grand, donc que α est proche de $\pi/2$.

- **Conclusion**

Il vaut mieux que tu laisses pendre le hamac pour être sûr de ne pas tomber ... mais je ne sais pas si ce sera très favorable pour ta sieste :)