



Optique

Optique géométrique

Exercice 1 : Distance apparente à travers un dioptre

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 1



- ▷ Formation d'image optique ;
- ▷ Lois de Descartes.

1 L'image A' est par définition le point d'intersection des rayons issus de A et traversant le dioptre. Un rayon évident est confondu avec l'axe (zz'), l'autre s'obtient par application de la loi de la réfraction, voir figure 1, sachant que comme $n > n'$ alors $i < i'$. On constate que ces rayons ne se coupent pas à droite du dioptre, mais leur prolongement se coupe côté gauche. L'image A' est donc virtuelle.

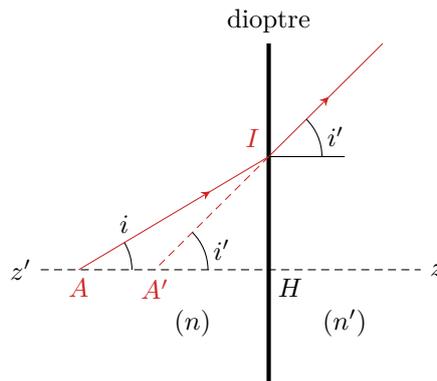


Figure 1 – Image à travers un dioptre.

2 En raisonnant dans les triangles rectangle AHI et $A'HI$, on obtient

$$\tan i = \frac{IH}{AH} \quad \text{et} \quad \tan i' = \frac{IH}{A'H}$$

d'où on déduit par identification des expressions de IH

$$AH \tan i = A'H \tan i'.$$

3 Un système optique est dit dans les conditions de Gauss lorsque les rayons qui le traversent sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique et à proximité de cet axe. Dans cette hypothèse, tous les angles sont petits. La relation précédente devient donc

$$AH i = A'H i' \quad \text{soit} \quad A'H = \frac{i}{i'} AH$$

et la loi de la réfraction s'écrit

$$n \sin i = n' \sin i' \quad \text{soit} \quad ni = n' i' \quad \text{et} \quad \frac{i}{i'} = \frac{n'}{n},$$

ce qui permet d'obtenir

$$A'H = \frac{n'}{n} AH.$$

4 On note A le poisson, A' son image par le dioptre eau/verre et A'' l'image finale, qui est l'image de A' par le dioptre verre/air. H est le projeté orthogonal de A sur le dioptre eau/verre et H' celui sur le dioptre verre/air. La distance cherchée est $A''H'$, qui est la distance apparente à partir du dioptre verre/air.

D'après la question précédente,

$$A'H = \frac{n_{\text{verre}}}{n_{\text{eau}}} AH = 5,6 \text{ cm.}$$

On en déduit

$$A'H' = A'H + e = 6,4 \text{ cm}$$

puis

$$A''H' = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} A'H' = 4,3 \text{ cm.}$$

Ainsi, le poisson **semble se trouver à 4,3 cm en arrière du dioptre air-verre** alors qu'il se trouve en réalité à 5,8 cm.

Exercice 2 : Distance hyperfocale d'un appareil photo

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2 | Ⓜ️



- ▷ Relation de conjugaison ;
- ▷ Profondeur de champ.

1 Voir figure 2. La mise au point est à l'infini, l'image se forme donc dans le plan focal image de l'objectif, c'est là que doit être placé le capteur.

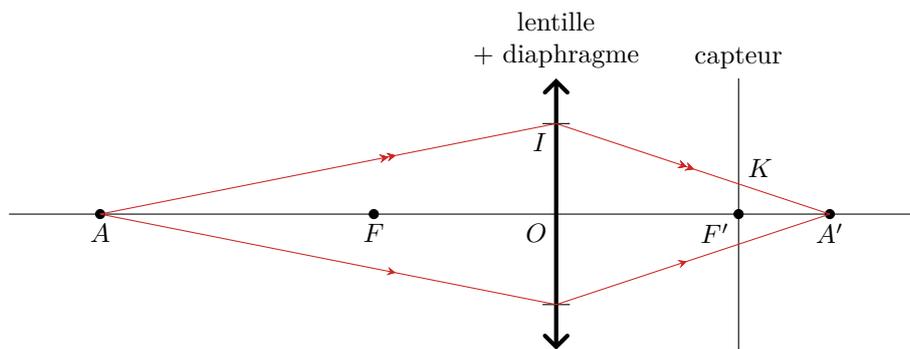


Figure 2 – Construction des rayons issus de A dans l'appareil photo.

2 Le plus simple est d'utiliser la relation de conjugaison avec origine au foyer,

$$\overline{FA} \overline{F'A'} = -f'^2 \quad \text{soit} \quad (f' - d) \Delta = -f'^2 \quad \text{donc} \quad \Delta = \frac{f'^2}{d - f'}$$

Sachant que $d \gg f'$, on peut approximer

$$\Delta \simeq \frac{f'^2}{d}$$

Pour retrouver rapidement cette relation, la retenir sous la forme $\overline{FA} \overline{F'A'} = \text{cte}$ indépendante du point A . Retrouver la valeur constante se fait en choisissant un point particulier, en l'occurrence le point O qui est son propre conjugué.

Le résultat peut aussi être établi à partir de la relation de conjugaison avec origine au centre optique, mais c'est un peu plus long :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{f' + \Delta} - \frac{1}{-d} = \frac{1}{f'} \quad \text{etc.}$$

3 La marche des rayons issus de A et passant par les extrémités du capteur est représentée figure 2. Ces deux rayons se rejoignent en A' , image de A par l'objectif. D'après le théorème de Thalès (ou en exprimant la tangente de l'angle d'inclinaison des rayons),

$$\frac{F'K}{OI} = \frac{F'A'}{OA'}$$

Ainsi, la hauteur $h = 2F'K$ de la tâche lumineuse sur le capteur est donnée par

$$h = 2 \times \frac{\Delta}{OA'} \times \frac{D}{2}.$$

De plus, avec la relation de conjugaison

$$\frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{d} = \frac{d - f'}{f'd} \simeq \frac{1}{f'}.$$

On en conclut

$$h = \frac{f'^2}{d} \times \frac{1}{f'} \times D \quad \text{soit} \quad \boxed{h = \frac{f'D}{d}}.$$

4 Pour que l'image de A soit nette, il faut avoir

$$h \leq a \quad \text{soit} \quad \boxed{d \geq \frac{f'D}{a} = 10 \text{ m.}}$$

Exercice 3 : Tripleur de focale de Barlow

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2



- ▷ Instrument d'optique ;
- ▷ Relations de conjugaison ;
- ▷ Construction de rayons.

1 La distance minimale entre la Terre et Jupiter est $D_{\min} = R_J - R_T = 6,3 \cdot 10^8 \text{ km}$. En utilisant directement l'approximation des petits angles,

$$\alpha_0 = \frac{D_J}{D_{\min}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 1,3 \cdot 10^{-2} \circ.$$

2 Jupiter étant située à l'infini, son image par L_1 se forme dans le plan focal image. C'est donc là qu'il faut placer le capteur, à une distance $D_c = f'_1 = 2550 \text{ mm}$ de L_1 . Comme Jupiter est vue sous un angle α_0 alors les rayons les plus extrêmes arrivent sur la lentille en formant un angle $\alpha_0/2$ avec l'axe optique. Ainsi, l'image de Jupiter a pour rayon

$$r = f'_1 \tan \frac{\alpha_0}{2} = \frac{D_J f'_1}{2D_{\min}} = 0,28 \text{ mm}.$$

3 Voir figure 3. Se lancer à main levée n'est pas évident pour que les rayons convergent bien sur le capteur ... il faut donc *commencer* par tracer les rayons, *puis ensuite* placer le capteur sur la figure à l'endroit où se forme l'image.

4 L'objet pour L_2 est l'image de Jupiter par L_1 . On sait qu'elle se trouve dans le plan focal image de L_1 . Ainsi, en notant O_c le centre du capteur où se trouve l'image finale, la relation de grandissement donne

$$\frac{\overline{O_2 O_c}}{\overline{O_2 F'_1}} = 3 \quad \text{donc} \quad \overline{O_2 F'_1} = \frac{1}{3} \overline{O_2 O_c} \quad \text{soit} \quad \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'_1} = \frac{1}{3} \overline{O_2 O_c}$$

Remplaçons les distances algébriques par les paramètres géométriques de la lunette, avec D_{12} la distance entre les centres optiques des deux lentilles,

$$-D_{12} + f'_1 = \frac{d}{3} \quad \text{d'où} \quad \boxed{D_{12} = f'_1 - \frac{d}{3} = 2483 \text{ mm.}}$$

La relation conjugaison de Descartes appliquée à L_2 donne ensuite

$$\frac{1}{\overline{O_2 O_c}} - \frac{1}{\overline{O_2 F'_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{O_2 O_c}} - \frac{3}{\overline{O_2 O_c}} = \frac{1}{f'_2}$$

d'où

$$\boxed{f'_2 = -\frac{d}{2} = -100 \text{ mm.}}$$

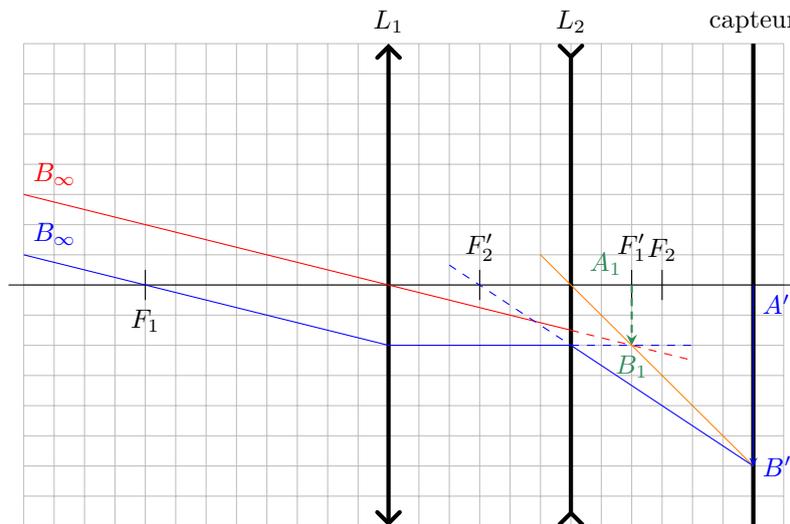


Figure 3 – Marche des rayons dans l'instrument.

La lentille est divergente, il est donc normal de trouver $f'_3 < 0$.

5 Comme démontré précédemment, la taille de l'image sur le capteur sans oculaire est directement proportionnelle à la distance focale image de l'objectif L_1 . L'oculaire de Barlow permet d'obtenir une image trois fois plus grande sur le capteur, ce qui nécessiterait de tripler la focale de la lentille objectif si on voulait l'utiliser seule. L'intérêt de l'oculaire est bien sûr un encombrement bien moindre.

Interférences

Exercice 4 : Interférences à deux ondes

oral banque PT | 💡 2 | ✂️ 2



▷ Formule de Fresnel.

1 Deux ondes sont cohérentes si elles sont **synchrones** (même fréquence, donc même longueur d'onde) et que leur déphasage est **indépendant du temps**.

En revanche, le déphasage dépend bien sûr du point d'observation, sans quoi il n'y aurait pas d'interférences.

2 Travaillons avec les représentations complexes, en prenant $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ pour alléger le calcul. Les ondes issues des deux sources s'écrivent

$$\underline{s}_1(M, t) = A_1 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_1 M) \right) \quad \text{et} \quad \underline{s}_2(M, t) = A_2 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M) \right).$$

Ainsi, l'intensité totale vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= |\underline{s}(M, t)|^2 = |\underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t)|^2 \\ &= (\underline{s}_1 + \underline{s}_2)(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^*) \\ &= \underline{s}_1 \underline{s}_1^* + \underline{s}_2 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1 \underline{s}_2^* + \underline{s}_1^* \underline{s}_2 \\ &= |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + 2 \operatorname{Re} (\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes donnent les intensités lumineuses des sources prises seules,

$$\mathcal{I}_1 = |\underline{s}_1|^2 = A_1^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_2 = |\underline{s}_2|^2 = A_2^2.$$

Calculons maintenant le terme d'interférences,

$$\underline{s}_1 \underline{s}_2^* = A_1 A_2 \exp i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (S_1 M) - \omega t + \frac{2\pi}{\lambda} (S_2 M) \right) = A_1 A_2 \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)] \right)$$

et en prenant la partie réelle

$$2 \operatorname{Re} (\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) = 2A_1A_2 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2M) - (S_1M)] \right).$$

et en identifiant les amplitudes avec les racines des intensités on obtient

$$2 \operatorname{Re} (\underline{s}_1 \underline{s}_2^*) = 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2M) - (S_1M)] \right).$$

soit finalement

$$\boxed{\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2M) - (S_1M)] \right)}.$$

3 Les franges d'interférences se définissent par $\mathcal{I} = \text{cte}$ donc $(S_2M) - (S_1M) = \text{cte}$. La donnée laisse clairement entendre qu'il s'agit en toute rigueur d'hyperboles, comme représenté figure 4.

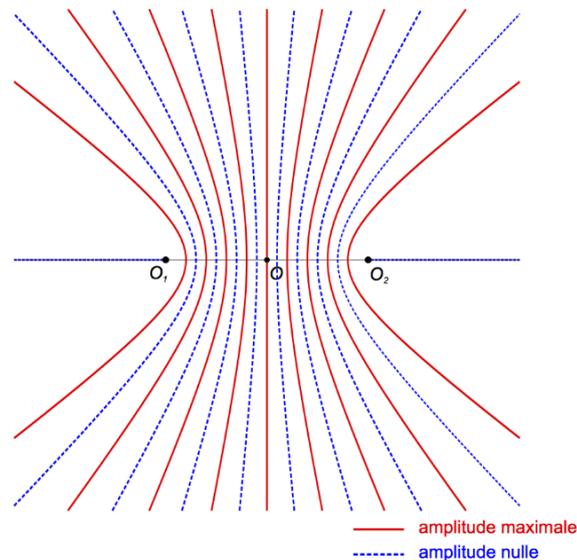


Figure 4 – Allure théorique d'une figure d'interférences.

4 En pratique, la figure d'interférences en 3d est un hyperboloïde de révolution, et l'écran étant à grande distance des sources, seule une petite portion est visible. Elle s'apparente à des cercles concentriques si l'écran est orthogonal à la droite S_1S_2 et à des franges rectilignes s'il est parallèle, voir figure 5.

Exercice 5 : Mesure de l'indice de l'air

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | ⚙

- *Lame d'air*;
- *Objet de phase*.

1 Cf. cours. Les franges d'interférence sont des cercles concentriques. Avec une source étendue incohérente, elles sont localisées à l'infini ... mais ce n'est pas le cas avec un laser, car les mécanismes d'émission lui permettent de former une source spatialement *cohérente*.

La distinction sur la cohérence spatiale d'un laser par rapport à une source classique me semble hors programme en PT ... mais en même temps le retour du candidat n'est pas très précis, et je ne suis pas certain que la question ait réellement été posée de la sorte.

2 Pour une lame d'air d'épaisseur e , l'ordre d'interférences au centre vaut

$$p = \frac{2n_0e}{\lambda}.$$

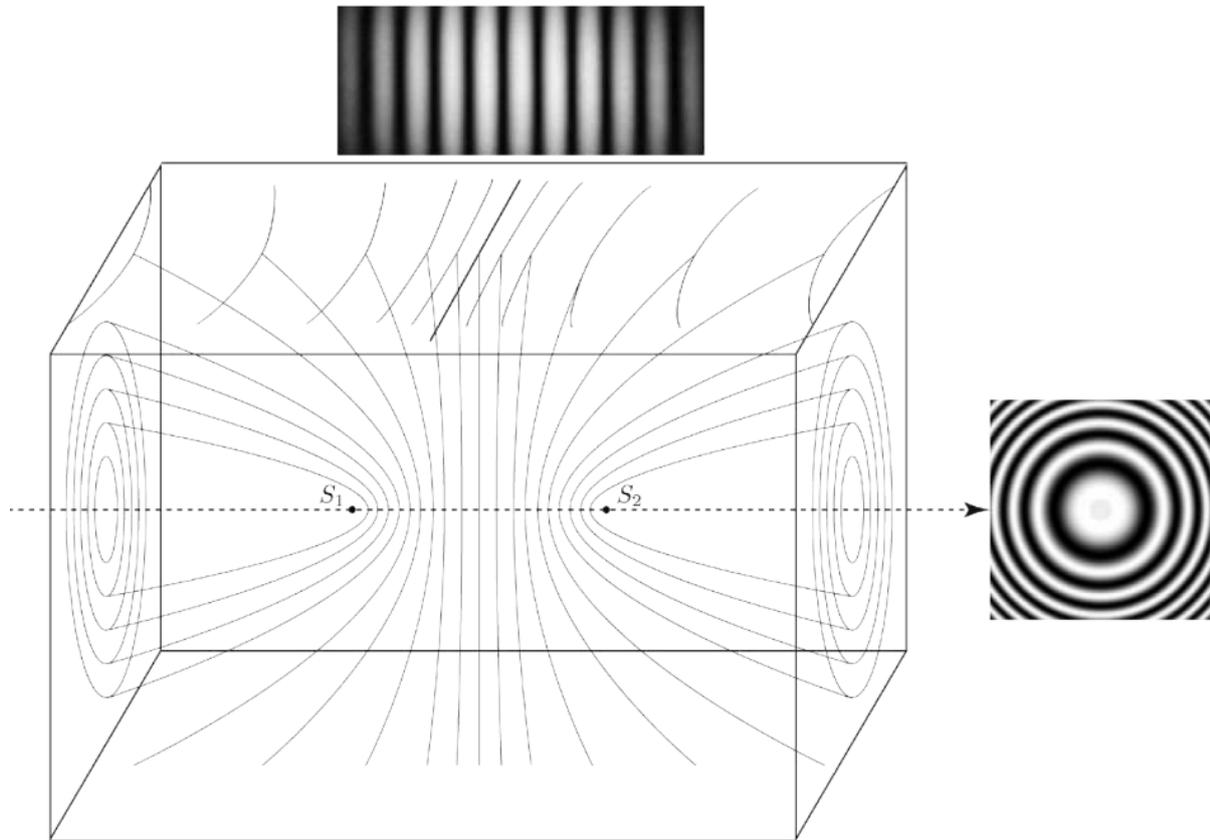


Figure 5 – Deux points de vue particulier.

Le candidat précise dans son retour d'oral que l'examinateur a accepté qu'il lui donne le résultat sans démonstration ... mais attention à ne pas oublier l'indice optique de l'air, car c'est lui qui nous intéresse dans cet exercice.

3 Notons n l'indice instantané du gaz contenu dans la cuve, compris entre n_0 et 1, et ℓ sa longueur. Les parois de verre sont d'indice n_v et d'épaisseur e_v . On en déduit la différence de marche entre les rayons traversant la cuve et ceux qui ne la traversent pas,

$$\delta = 2n_0e + 2(n_v e_v + n\ell + n_v e_v) - 2n_0(e_v + \ell + e_v)$$

d'où on en déduit l'ordre d'interférences à un instant quelconque de l'expérience,

$$p = \frac{2n_0e + 4(n_v - n_0)e_v + 2(n - n_0)\ell}{\lambda}.$$

Au début de l'expérience, $n = n_0$ donc

$$p_I = \frac{2n_0e + 4(n_v - n_0)e_v}{\lambda}$$

et à la fin $n = 1$ ce qui donne

$$p_F = \frac{2n_0e + 4(n_v - n_0)e_v + 2(1 - n_0)\ell}{\lambda}.$$

Ainsi, l'ordre d'interférences a varié en valeur absolue de

$$\Delta p = |p_F - p_I| = \frac{2(n_0 - 1)\ell}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad n_0 - 1 = \frac{\lambda \Delta p}{2\ell}.$$

Or une variation d'une unité de l'ordre d'interférences se traduit par le retour à une frange brillante au centre de l'écran. On observe sur la courbe donnée par l'énoncé 13 maxima puis un minimum d'intensité, ce qui permet d'en déduire

$$13,5 < \Delta p < 14$$

soit en prenant les valeurs numériques

$$2,67 \cdot 10^{-4} < n_0 - 1 < 2,77 \cdot 10^{-4}.$$

À titre de comparaison, la valeur tabulée est de $2,72 \cdot 10^{-4}$ à 20°C . Une exploitation plus fine de la courbe laisse clairement entendre que $\Delta p \simeq 13,75$, ce qui mènerait encore plus près de cette valeur.

Exercice 6 : Étoile double

oral banque PT | 💡 2 | ✂ 2 | Ⓜ



- ▷ Différence de marche à l'infini ;
- ▷ Deux sources ponctuelles.

Cet exercice est un classique qui présente une application intéressante (et réelle) de l'interférométrie par division de front d'onde. Il faut bien comprendre que, contrairement à la situation étudiée en cours, la source est impossible à modifier mais que l'écart ℓ entre les pseudo-trous d'Young l'est.

1 Les ondes issues de chacune des étoiles interfèrent avec elle-même après passage au travers des trous, ce qui donne une figure d'interférences sur l'écran. Les deux ondes issues des deux étoiles sont incohérentes et ne peuvent interférer. Les deux figures d'interférences se superposent simplement.

2 Comme l'observation se fait dans le plan focal image d'une lentille convergente, les rayons qui interfèrent sont ceux qui ont la même inclinaison α en sortie des trous car issus du même point à l'infini.

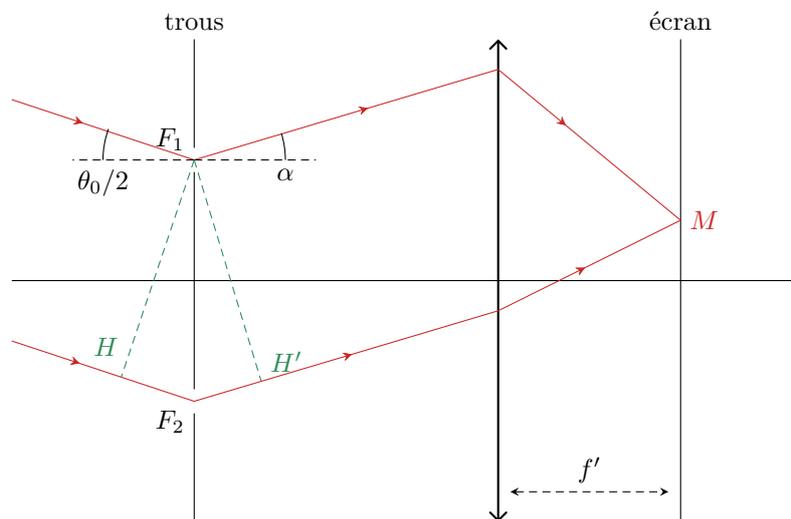


Figure 6 – Tracé des rayons issus de E_2 dans l'interféromètre stellaire.

Considérons les rayons issus d'une seule étoile, voir figure 6. D'après le théorème de Malus, F_1 et H appartiennent au même plan d'onde. Par ailleurs, en vertu du théorème de Malus et du principe de retour inverse, les chemins optiques (F_1M) et $(H'M)$ sont égaux. On en déduit

$$\delta = HF_2 + F_2H'.$$

Attention, les deux arguments sont importants. Le théorème de Malus indique que si une source ponctuelle était placée en M , alors F_1 et H' appartiendraient au même plan d'onde et donc il y a égalité des chemins optiques (MF_1) et (MH') . Le principe du retour inverse permet d'en déduire l'égalité des chemins optiques (F_1M) et $(H'M)$, qui n'aurait a priori rien d'évident puisque H' et F_1 n'appartiennent PAS au même plan d'onde.

Ainsi,

$$HF_2 = \ell \sin \frac{\theta_0}{2} \simeq \ell \frac{\theta_0}{2}, \quad \text{et} \quad F_2H' = \ell \sin \alpha \simeq \ell \alpha.$$

En outre, $\alpha \simeq \tan \alpha = x/f'$, d'où

$$\delta = \frac{\ell \theta_0}{2} + \frac{\ell x}{f'}.$$

L'intensité lumineuse se déduit de la formule de Fresnel,

$$I_1(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\ell \theta_0}{2\lambda} + 2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right) \right].$$

Un calcul en tout point identique permet de montrer que pour la seconde étoile seul change le signe de l'angle d'incidence, donc

$$I_2(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(-2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} + 2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right) \right].$$

Les deux étoiles étant incohérentes, $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$, soit

$$I = 2I_0 \left[2 + \cos \left(2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} + 2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right) + \cos \left(-2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} + 2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right) \right]$$

3 En factorisant les cosinus de l'expression précédente,

$$I(x) = 2I_0 \left[2 + 2 \cos \left(2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right) \cos \left(2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} \right) \right]$$

$$I(x) = 4I_0 \left[\underbrace{1 + \cos \left(2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} \right)}_{\text{visibilité}} \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{\ell x}{\lambda f'} \right)}_{\text{interférences}} \right].$$

4 Les interférences disparaissent si le terme de contraste est nul, soit

$$2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

Au contraire, elles sont le mieux visible lorsque le terme de contraste vaut ± 1 , soit

$$2\pi \frac{\ell\theta_0}{2\lambda} = n\pi.$$

5 La première annulation se fait en

$$2\pi \frac{\ell^* \theta_0}{2\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \theta_0 = \frac{\lambda}{2\ell^*}.$$

Exercice 7 : Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 2



- ▷ Interférences en lumière blanche ;
- ▷ Objet de phase.

1 En configuration lame d'air, les deux miroirs de l'interféromètre sont **parfaitement perpendiculaires**, on les qualifie parfois de « miroirs parallèles » en raisonnant sur l'image d'un miroir par la séparatrice. Les franges d'interférences sont **circulaires** et **localisées à l'infini**. On les observe donc **dans le plan focal image d'une lentille convergente**.

2 En présence du film alimentaire, la différence de marche n'est plus nulle entre les deux voies, mais constante. Ainsi, la valeur de l'ordre d'interférence dépend de la longueur d'onde, et les interférences sont constructives pour certaines d'entre elles et destructives pour d'autres. S'il y en a suffisamment, l'œil ne peut plus faire la différence : la couleur observée est un **blanc d'ordre supérieur**.

3 Si la longueur d'onde est absente, alors les interférences sont destructives, donc l'ordre p est demi-entier. En introduisant un entier k ,

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = k + \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{2k+1}{2} \frac{1}{\delta} \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{2}{2k+1} \delta.$$

4 La différence de marche au centre des anneaux vaut $2(n-1)e$: l'un des rayons qui interfèrent traverse deux fois le film alimentaire (chemin optique $2 \times ne$) tandis que le second traverse la même épaisseur mais dans l'air (chemin

optique $2 \times e$). On compte sur le spectre vingt annulations d'intensité entre $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_{\max} = 800 \text{ nm}$. Entre une annulation et la suivante, l'ordre d'interférence varie de 1. Ainsi, comme la différence de marche est constante,

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{2k+1}{4(n-1)e} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{2(k+20)+1}{4(n-1)e} = \frac{40+2k+1}{4(n-1)e}.$$

Pour isoler e en éliminant l'inconnue k , il suffit de prendre la différence

$$\frac{1}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{40}{4(n-1)e} = \frac{10}{(n-1)e}$$

d'où on déduit

$$e = \frac{10}{n-1} \frac{1}{\frac{1}{\lambda_{\min}} - \frac{1}{\lambda_{\max}}} = 16 \mu\text{m}.$$

Exercice 8 : lame de verre

oral banque PT | 💡 3 | ✂️ 3



- ▷ *Lame à faces parallèles ;*
- ▷ *Calcul de chemin optique ;*
- ▷ *Étude détaillée de la figure d'interférences.*

Les notations utilisées pour l'ensemble de l'exercice sont représentées figure 7.

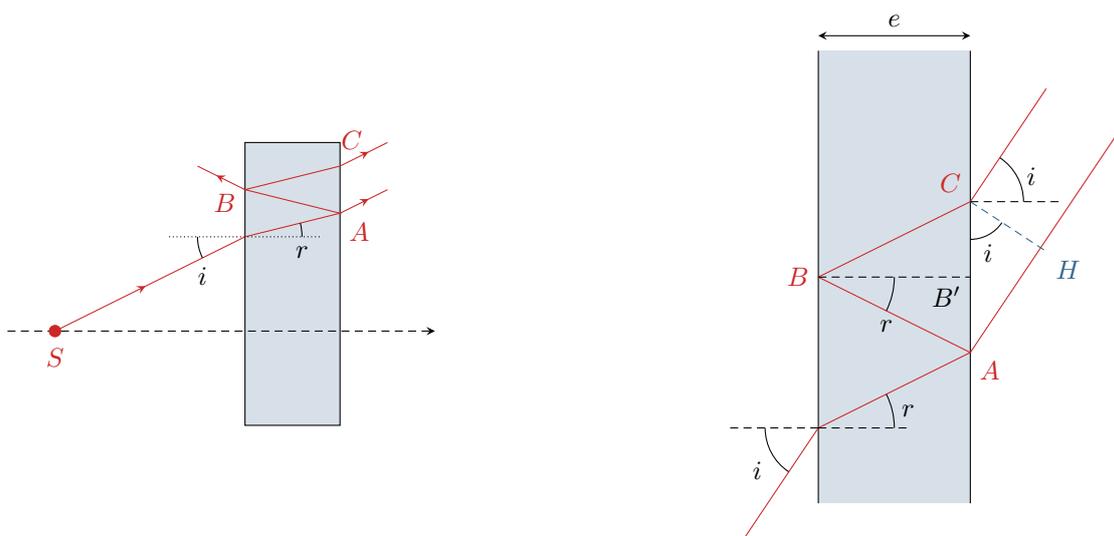


Figure 7 – Interférences avec une lame de verre. La loi de Descartes de la réfraction appliquée à l'entrée et à la sortie de la lame montre que l'angle d'émergence est égal à l'angle d'incidence : « $\sin i = n \sin r = \sin i$ ».

1 Les deux ondes qui interfèrent sont d'une part l'onde qui traverse directement la lame et en ressort au point A, et d'autre part celle qui fait un aller-retour dans la lame en étant réfléchi aux points A et B pour en ressortir au point C. L'énoncé indique que l'onde qui se réfléchit en C et fait un deuxième aller-retour dans la lame est négligeable, il s'agit bien d'interférences à deux ondes seulement.

2 Dans un Michelson en lame d'air, les interférences sont localisées à l'infini. Par analogie, on peut penser qu'il en est de même ici. Il faut donc utiliser une **lentille convergente** et placer l'écran d'observation **dans le plan focal image**.

Complément complètement hors-programme : Il existe un théorème appelé *théorème de localisation*, démontrable comme tout théorème qui se respecte, qui indique que les interférences par division d'amplitude sont localisées là où se coupent les deux rayons émergents de l'interféromètre issus du même rayon incident. Ici, les deux rayons représentés sont issus du même rayon incident et ressortent parallèles de « l'interféromètre », ce qui revient à dire qu'ils se coupent à l'infini.

3 • **Première démonstration :** une première possibilité consiste à prolonger les deux rayons émergents de la lame

jusqu'à l'axe optique pour identifier les sources secondaires ... mais aboutir au résultat est moins immédiat qu'en lame d'air à cause de la réfraction qu'il n'est pas si simple de prendre en compte.

• **Deuxième démonstration** : on peut également adapter la deuxième méthode pour démontrer le résultat en lame d'air, qui consiste à raisonner avec les miroirs. Si la source était située au point d'observation M , alors d'après le principe de retour inverse de la lumière et le théorème de Malus, les points H et C seraient situés sur le même plan d'onde et ainsi $(CM) = (HM)$. Ainsi,

$$\delta = (SM)_C - (SM)_A = [(SA) + (AB) + (BC) + (CM)] - [(SA) + (AH) + (HM)] .$$

En raisonnant dans le triangle ABB' ,

$$\cos r = \frac{BB'}{AB} = \frac{e}{AB} \quad \text{d'où} \quad AB + BC = \frac{2e}{\cos r} .$$

Par ailleurs, en raisonnant dans le triangle ACH ,

$$\sin i = \frac{AH}{AC} = \frac{AH}{2AB'} \quad \text{soit} \quad AH = 2AB' \sin i$$

et en revenant au triangle ABB'

$$\tan r = \frac{AB'}{BB'} = \frac{AB'}{e}$$

si bien que

$$AH = 2e \tan r \sin i .$$

En prenant en compte les indices pour exprimer les chemins optiques,

$$\delta = (AB) + (AC) - (AH) = \frac{2ne}{\cos r} - 2e \tan r \sin i .$$

Or d'après la loi de la réfraction $\sin i = n \sin r$, d'où

$$\delta = \frac{2ne}{\cos r} - 2e \frac{\sin r}{\cos r} n \sin r = \frac{2ne}{\cos r} (1 - \sin^2 r) = \frac{2ne}{\cos r} \cos^2 r$$

ce qui conduit en fin de compte à

$$\boxed{\delta = 2ne \cos r .}$$

4 Le rayon R sur l'écran est relié à l'angle i , par $\tan i \simeq i = R/f'$. Par un développement limité,

$$p = \frac{2ne}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2} \right)$$

et en combinant avec la loi de la réfraction linéarisée, $i = nr$, on aboutit à

$$\boxed{p(M) = \frac{2ne}{\lambda} \left(1 - \frac{R^2}{2n^2 f'^2} \right) .}$$

5 Comme toujours en configuration « lame », l'ordre est maximal au centre (ce qui se voit sur l'expression précédente de p), où il vaut

$$p_{\max} = \frac{2ne}{\lambda} = 54,5 .$$

L'ordre est maximal au centre, donc le premier anneau brillant a pour ordre l'entier immédiatement inférieur, soit $p_1 = 54$. D'après l'expression précédente,

$$1 - \frac{R_1^2}{2n^2 f'^2} = \frac{p_1 \lambda}{2ne} \quad \text{soit} \quad \frac{R_1^2}{2n^2 f'^2} = 1 - \frac{p_1 \lambda}{2ne} \quad \text{d'où} \quad \boxed{R_1 = n f' \sqrt{2 - \frac{p_1 \lambda}{ne}} = 4,2 \text{ cm} .}$$

Exercice 9 : Réseau linéaire d'antennes

- ▷ Interférences à N ondes ;
- ▷ Représentation complexe.

1 Raisonons sur la figure 8 pour calculer la différence de marche. Si la source était en M , alors, d'après le théorème de Malus, H et S_0 appartiendraient au même plan d'onde. Avec le principe de retour inverse, on en déduit

$$(S_0M) = (HM) \quad \text{d'où} \quad \delta = (S_1H) + (HM) - (S_0M) = (S_1H).$$

Par trigonométrie dans le triangle S_0S_1H , il vient

$$\delta = d \sin \theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta.}$$

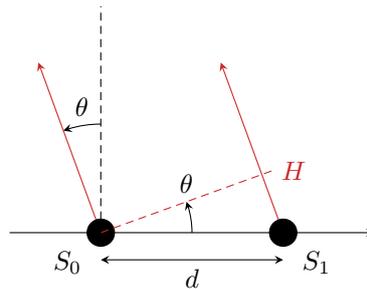


Figure 8 – Zoom sur les deux premières antennes.

Comme les antennes sont régulièrement espacées, les déphasages sont simplement des multiples de ϕ , soit

$$\phi_n = \frac{2\pi nd}{\lambda} \sin \theta.$$

Pour comprendre ce résultat, on peut voir que pour la source S_n l'hypoténuse du triangle servant à exprimer δ_n vaudrait nd .

2 D'après le principe de superposition,

$$s(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} A e^{i(\omega t - n\phi)} = A e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\phi}.$$

On reconnaît alors une somme géométrique à N termes de raison $e^{-i\phi}$, ce qui permet d'écrire

$$s(M, t) = A e^{i\omega t} \frac{1 - e^{-iN\phi}}{1 - e^{-i\phi}} = A e^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}$$

ce qui conduit bien au résultat donné

$$s(M, t) = A e^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}.$$

On en déduit l'intensité,

$$\boxed{I(M) = |s(M, t)|^2 = A^2 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}.$$

3 Les maxima d'intensité se trouvent aux angles θ_m tels que

$$\frac{\phi}{2} = m\pi \quad \text{soit} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_m = m\pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_m = \arcsin \frac{m\lambda}{d}.$$

La valeur $m = 0$ donnera toujours un maximum en $\theta_m = 0$, c'est-à-dire dans la direction normale au réseau. Pour qu'il soit unique, il faut que le maximum $m = 1$ n'existe pas, ce qui est le cas si $\lambda/d > 1$, car un sinus est forcément inférieur à 1. Ainsi, le réseau d'antennes ne produit qu'un seul maximum dès que

$$\boxed{d \leq \lambda.}$$

4 En utilisant la donnée, l'intensité au niveau d'un maximum vaut

$$I_{\max} = N^2 A^2.$$

La première annulation d'intensité de part et d'autre du maximum central a lieu pour

$$\frac{N\phi}{2} = \pm\pi \quad \text{soit} \quad \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta_{\pm} = \pm\pi \quad \text{d'où} \quad \theta_{\pm} = \arcsin \frac{\lambda}{Nd} = \arcsin \frac{2}{N}.$$

On en déduit la largeur angulaire,

$$\Delta\theta = 2 \arcsin \frac{2}{N},$$

qui est d'autant plus petite que N est élevé. Ainsi, augmenter le nombre d'antennes du réseau permet d'avoir une **intensité maximale plus élevée** ($I_{\max} \propto N^2$) et des **maxima plus étroits** ($\Delta\theta \propto 1/N$ dès que N est assez grand pour faire un développement limité de l'arcsinus).

5 Les calculs sont en tous points identiques, en remplaçant ϕ par $\phi + \psi$. Les maxima d'intensité se trouvent donc dans les directions θ telles que

$$\frac{\phi + \psi}{2} = m\pi \quad \text{soit} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta_m + \frac{\psi}{2} = m\pi \quad \text{et} \quad \sin \theta_m = \arcsin \left(\frac{m\lambda}{d} - \frac{\lambda}{\pi d} \frac{\psi}{2} \right).$$

En supposant la distance entre antennes telles que seul $m = 0$ donne un maximum visible, celui-ci se trouve à l'angle

$$\theta_{\max} = - \arcsin \frac{\lambda\psi}{2\pi d}.$$

Modifier le déphasage ψ permet donc bien de contrôler la position du maximum d'intensité.

Problème ouvert

Exercice 10 : Gravimètre à chute de coin de cube inspiré Centrale TSI 2021 et oral banque

PT | 3 | 2



▷ Problème ouvert.

1 Les interférences de deux ondes de même intensité produisent une intensité

$$I = 2I_0 (1 + \cos \Delta\varphi).$$

2 Le dispositif est analogue à un interféromètre de Michelson en lame d'air. L'épaisseur de la lame d'air e est directement reliée à la position $z(t)$ du trièdre mobile,

$$e = z(t) + \text{cte}.$$

Ainsi, au centre de la figure d'interférences,

$$\delta = 2z(t) + \text{cte}$$

ce qui donne en supposant la constante nulle

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda_0} z(t).$$

3 Le coin de cube est en chute libre unidimensionnelle, dans le vide donc soumis uniquement à son poids. Par application du TRC au coin de cube dans le référentiel terrestre, galiléen sur la durée de l'expérience, on a

$$\ddot{z}(t) = g \quad \text{donc} \quad \dot{z}(t) = gt + \dot{z}(\theta) \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + z(\theta).$$

4 Le déphasage entre les deux ondes augmente au cours du temps, mais de façon non linéaire. Ainsi, une frange brillante est observable est chaque fois qu'il atteint un multiple de 2π . En raison de l'accélération due à la chute, les instants auxquels ces valeurs sont atteintes sont de plus en plus rapprochés, à cause du terme en t^2 .

Attention à ne pas confondre, l'abscisse est ici le temps : il n'est donc absolument pas question d'interfrange, qui décrirait des variations d'intensité lumineuse en fonction d'une position sur l'écran. De toute façon, un Michelson en lame d'air (ou un équivalent comme ici) produit des anneaux qui ne sont pas régulièrement espacés.

5 L'ordre d'interférences varie de 1 entre deux franges brillantes consécutives. Ici, il varie d'un peu plus de 15 entre le début et la fin de l'acquisition, car on voit défilé 15 franges brillantes « et un peu plus » car l'éclairement n'est pas maximal en fin d'acquisition. Ainsi,

$$p_{\text{fin}} \simeq p_{\text{init}} + 15 \quad \text{soit} \quad \frac{2z_{\text{fin}}}{\lambda_0} \simeq 0 + 15 \quad \text{et} \quad \frac{g t_{\text{fin}}^2}{\lambda_0} \simeq 15$$

et finalement

$$g \simeq 15 \frac{\lambda_0}{t_{\text{fin}}^2} = 9,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

6 En reprenant le calcul issu du PFD avec des conditions initiales non nulles, on obtient

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0.$$

L'énoncé posait $z_0 = 0$ mais c'est une erreur, l'idée étant justement que la position initiale ne peut pas être connue avec précision.

7 Pas facile à première vue de savoir comment partir ! Ainsi, comme toujours dans ces cas là, on écrit ce que l'on sait qui puisse relier les différents termes présents dans le résultat, en l'occurrence le lien entre z et p , et on oriente le calcul pour chercher à faire disparaître les termes inconnus, qui n'apparaissent pas dans le résultat final.

À partir de l'expression donnée du déphasage, on a $p = 2z/\lambda$ soit $z = p\lambda/2$. Ainsi, aux trois points considérés,

$$\begin{cases} z(t_1) = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + z_0 = \frac{p_1\lambda}{2} \\ z(t_2) = \frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 + z_0 = \frac{p_2\lambda}{2} \\ z(t_3) = \frac{1}{2}gt_3^2 + v_0t_3 + z_0 = \frac{p_3\lambda}{2} \end{cases}$$

On constate que le résultat final ne fait apparaître ni z_0 , ni v_0 : une piste pour orienter le calcul est donc de les éliminer progressivement. Puisque le résultat fait intervenir $p_3 - p_1$ et $p_2 - p_1$, on soustrait la première ligne aux deux suivantes, ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1) = \frac{(p_2 - p_1)\lambda}{2} \\ \frac{1}{2}g(t_3^2 - t_1^2) + v_0(t_3 - t_1) = \frac{(p_3 - p_1)\lambda}{2} \end{cases}$$

Cherchons ensuite à éliminer la vitesse initiale v_0 , en divisant par la différence des temps et en reconnaissant une identité remarquable,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}g(t_2 + t_1) + v_0 = \frac{(p_2 - p_1)\lambda}{2(t_2 - t_1)} \\ \frac{1}{2}g(t_3 + t_1) + v_0 = \frac{(p_3 - p_1)\lambda}{2(t_3 - t_1)} \end{cases}$$

Pour éliminer la vitesse, soustrayons enfin la première ligne à la deuxième :

$$\frac{1}{2}g[(t_3 + t_1) - (t_2 + t_1)] = \frac{(p_3 - p_1)\lambda}{2(t_3 - t_1)} - \frac{(p_2 - p_1)\lambda}{2(t_2 - t_1)}$$

Il ne reste plus qu'à isoler g dans le calcul,

$$\frac{1}{2}g(t_3 - t_2) = \frac{\lambda}{2} \frac{(p_3 - p_1)(t_2 - t_1) - (p_2 - p_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$$

ce qui donne bien le résultat voulu,

$$g = \lambda \frac{(p_3 - p_1)(t_2 - t_1) - (p_2 - p_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$