TD 1 – Préparation à l'oral *Correction*

Lundi 20 mai

Planche d'oral complète

Exercice 1 : Sélénites [oral banque PT]

1 La masse volumique étant homogène,

$$\boxed{M_L = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \mu_L}$$

2 On se place en coordonnées sphériques pour calculer le champ gravitationnel en un point M quelconque.

- **Invariances et symétries :**

▷ la distribution de masse est invariante par toute rotation autour du centre de la Lune, donc $\vec{g}$ ne dépend que de la variable r ;

▷ tout plan contenant O et M est plan de symétrie de la distribution de masse, donc $\vec{g}(M)$ est inclus dans tous ces plans, il est donc forcément radial ;

▷ conclusion :

$$\vec{g}(M) = g_r(r)\,\vec{e}_r\,.$$

- **Théorème de Gauss :** on choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon r passant par M.

▷ Flux sortant :

$$\oiint \vec{g}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2\, g_r(r)\,.$$

▷ Masse intérieure :

→ si $r > R_0$ on a directement

$$M_{\text{int}} = M_L\,,$$

→ si $r < R_0$, comme la masse volumique est uniforme,

$$M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_L = \frac{r^3}{R_0^3} M_L\,.$$

▷ Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit

$$\oiint \vec{g}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}\, m_{\text{int}} \qquad \text{soit} \qquad 4\pi r^2\, g_r(r) = \begin{cases} -4\pi\mathcal{G}\dfrac{r^3}{R_0^3} M_L & \text{si } r \leq R_0 \\ -4\pi\mathcal{G}\, M_L & \text{si } r \geq R_0 \end{cases}$$

> *Pour retrouver l'analogie entre le théorème de Gauss de l'électrostatique et le théorème de Gauss gravitationnel, il faut raisonner sur l'expression de la force :*
>
> $$\vec{F}_{\text{grav}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$
>
> *ce qui permet d'identifier*
>
> $$\frac{1}{\varepsilon_0} \qquad \longleftrightarrow \qquad -4\pi\mathcal{G}\,.$$

- **Conclusion :** le champ gravitationnel créé par la Lune vaut

$$\boxed{\vec{g} = \begin{cases} -\mathcal{G}\dfrac{r}{R^3} M_L\,\vec{e}_r & \text{si } r \leq R_0 \\ -\mathcal{G}\dfrac{M_L}{r^2}\,\vec{e}_r & \text{si } r \geq R_0 \end{cases}}$$

Étienne Thibierge, 14 mai 2019, www.etienne-thibierge.fr

3 Par définition, la force de pesanteur subie par le corps de masse m vaut

$$\vec{F}_\mathrm{p} = m\vec{g}(r) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{F}_\mathrm{p} = -\mathcal{G} m M_L \frac{r}{R_0^3}\,\vec{e}_r\,.}$$

4 La force de pesanteur subie par une particule fluide de masse volumique μ et de volume $\mathrm{d}V$ s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{p} = -\mathcal{G}\mu\,\mathrm{d}V\,M_L \frac{r}{R_0^3}\,\vec{e}_r\,.$$

On en déduit la force volumique

$$\vec{f} = -\mathcal{G}\mu M_L \frac{r}{R_0^3}\,\vec{e}_r\,.$$

La relation de la statique des fluides s'écrit alors

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \vec{f}$$

soit en projection

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\mathcal{G}\mu M_L \frac{r}{R_0^3}$$

Si la grotte contient de l'air modélisé par un gaz parfait de masse molaire M et de température uniforme, la masse volumique est donnée par l'équation d'état :

$$PV = \frac{m}{M}RT \qquad \text{soit} \qquad \mu = \frac{MP}{RT}\,.$$

On a alors

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\mathcal{G}\frac{MP}{RT} M_L \frac{r}{R_0^3}$$

que l'on intègre par séparation des variables

$$\begin{aligned}\int_{P_\mathrm{g}}^{P_L} \frac{\mathrm{d}P}{P} &= -\mathcal{G}\frac{M}{RT}M_L\frac{1}{R_0^3}\int_{R_0-h}^{R_0} r\,\mathrm{d}r \\ \ln\frac{P_L}{P_\mathrm{g}} &= -\frac{\mathcal{G}MM_L}{RTR_0^3}\times\frac{1}{2}\left[R_0^2-(R_0-h)^2\right] \\ &= -\frac{\mathcal{G}MM_L}{RTR_0^3}h\left(R_0-\frac{h}{2}\right)\,.\end{aligned}$$

d'où on déduit finalement

$$\boxed{P_\mathrm{g} = P_L \exp\left[\frac{\mathcal{G}MM_L}{RTR_0^3}h\left(R_0-\frac{h}{2}\right)\right]\,.}$$

> *On peut constater que la pression est plus élevée à l'intérieur de la grotte qu'en surface de la Lune, ce qui est qualitativement comparable au modèle de l'atmosphère isotherme ... mais ici on ne retrouve pas la variation exponentielle car le champ de pesanteur n'est pas uniforme.*

Exercice 2 : Chimie du carbone [oral banque PT]

1 Par combinaison linéaire, $(R) = (1) - (2)$, on obtient

$$2\,\mathrm{CO_{(g)}} + 2\,\mathrm{H_2O_{(g)}} = 2\,\mathrm{CO_{2(g)}} + 2\,\mathrm{H_{2(g)}}\,.$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{\mathrm{CO_{(g)}} + \mathrm{H_2O_{(g)}} = \mathrm{CO_{2(g)}} + \mathrm{H_{2(g)}}\,.}$$

2 Les inconnues sont a priori les quatre fractions molaires, la température et la pression. Cependant, comme la réaction conserve la quantité de matière totale de gaz alors la pression n'est pas facteur d'équilibre. Les relations sont d'une part la loi d'action des masses et d'autre part la somme des fractions molaires en phase gazeuse égale à 1. On en déduit que la variance vaut $6 - 1 - 2 = 3$.

3 Par combinaison linéaire,

$$\Delta_\mathrm{r}G^\circ = \Delta_\mathrm{r}G_1^\circ - \Delta_\mathrm{r}G_2^\circ = -82\cdot 10^3 + 17\,T\,.$$

4 La réaction étudiée est exothermique : $\Delta_\mathrm{r}H^\circ = -82\cdot 10^3\,\mathrm{kJ\cdot mol^{-1}} < 0$. Baisser la température du milieu réactionnel permettrait donc d'augmenter le rendement. On peut aussi envisager d'extraire les produits.

5 La réaction ne modifie pas la quantité de matière totale de gaz donc la pression n'est pas facteur d'équilibre.

Résolution de problème

Exercice 3 : Money, money, money

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25\,°\mathrm{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5\,°\mathrm{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

- ▷ Système : contenu du frigo.
- ▷ Bilan des échanges énergétiques :
  - → transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_\text{frigo} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;
  - → transfert thermique de fuite : $Q_\text{fuite} = +\mathcal{P}_\text{fuite}\,\Delta t > 0$ avec $\mathcal{P}_\text{fuite} = 10\,\mathrm{W}$ et $\Delta t = 1\,\mathrm{h} = 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s}$ (attention au signe, compte tenu de la différence de température, c'est le contenu du frigo qui reçoit effectivement de l'énergie).
- ▷ Variation d'énergie interne : par additivité, $\Delta U = \Delta U_\text{jus}$, et on assimile le jus de fruit à de l'eau du point de vue thermique.

$$\Delta U \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} Q_\text{frigo} + Q_\text{fuite} \underbrace{=}_{\text{modèle}} m_\text{jus}\, c_\text{eau}\,(T_F - T_I)$$

où $m_\text{jus} = 6\,\mathrm{kg}$. On en déduit

$$Q_\text{frigo} = m_\text{jus}\, c_\text{eau}\,(T_F - T_I) - \mathcal{P}_\text{fuite}\,\Delta t = -5{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\,.$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le moteur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_\text{froid}/W|$ où les échanges énergétiques sont ceux du fluide. Ici, on a donc $e = |Q_\text{frigo}|\,/\mathcal{E}_\text{élec}$. Par ailleurs, l'efficacité de Carnot d'un frigo vaut $e_\mathrm{C} = T_\text{frigo}/(T_\text{ext} - T_\text{frigo})$. En combinant, on en déduit

$$e = \frac{|Q_\text{frigo}|}{\mathcal{E}_\text{élec}} = 0{,}7\,\frac{T_\text{frigo}}{T_\text{ext} - T_\text{frigo}} \simeq 10 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{E}_\text{élec} = \frac{|Q_\text{frigo}|}{e} = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{J}\,.$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1\,\mathrm{kWh} = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{W} \times 3{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$. On trouve

$$\boxed{p = \frac{5 \cdot 10^4\,\mathrm{J}}{3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}} \times 0{,}15\,€ = 0{,}2\,\text{centime}\,.}$$

Si jamais il restait du temps

Exercice 4 : Utilisation des UV en chimie [oral banque PT]

> *Voilà un exercice un peu surprenant ... aucune question ou presque n'évalue des savoirs-faire au programme !*

1 L'énergie nécessaire pour rompre une liaison est

$$E_1 = \frac{E}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\,.$$

Pour qu'un photon issu d'un laser en soit l'origine, il faut que l'énergie du photon ε soit telle que

$$\varepsilon > E_1 \qquad \text{soit} \qquad h\nu > \frac{E}{\mathcal{N}_\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad h\frac{c}{\lambda} > \frac{E}{\mathcal{N}_\mathrm{A}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\lambda < \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} hc}{E} = 340\,\mathrm{nm}\,.}$$

Il s'agit d'une radiation appartenant au domaine des proches UV.

2 Le but en chirurgie oculaire est généralement de modifier localement l'épaisseur de la cornée ... pas de détruire tous les récepteurs de l'œil !

3 Les UV peuvent être utilisés par exemple comme initiateurs de réactions : on parle d'initiation par voie photochimique.

4 Généralement, les UV sont produits par laser.

Étienne Thibierge, 14 mai 2019, www.etienne-thibierge.fr